Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 127.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35 Lützowstraße 107/8.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1904.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 127.

Seite

Bohl, P., Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage . . . . . — 179

Fields, J. C., Forms for the *Abelian* Integrals of the three kinds in the case of a curve for which the tangents at the multiple points are distinct from one another . . . . . — 277

Guldberg, A., Über Differenzengleichungen, die Fundamentallösungen besitzen — 175

Gundelfinger, S., Bemerkungen und Ergänzungen zu der Abhandlung des Herrn *Heffter:* „Zur Klassifikation . . .“ . . . . . — 85

Hensel, K., Neue Grundlagen der Arithmetik . . . . . — 51

— — Theorie der Körper von Matrizen . . . . . — 116

Jung, H., Über die Transformation algebraischer Körper vom Range Eins . — 103

Karpinski, L. C., Über die Verteilung der quadratischen Reste . . . . . — 1

Landau, E., Eine Anwendung des *Eisenstein*schen Satzes auf die Theorie der *Gauß*schen Differentialgleichung . . . . . — 92

— — Über eine Darstellung der Anzahl der Idealklassen eines algebraischen Körpers durch eine unendliche Reihe . . . . . — 167

Schur, J., Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen . . . . . — 20

138999

Über die Verteilung der quadratischen Reste.

(Von Herrn *Louis C. Karpinski* in Oswego, New York, U. S. A.)

In der Abhandlung „De nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem“, die sich in *Gauß* Werken, Bd. II, befindet, hat *Gauß* die Formeln aufgestellt für die Verteilung der quadratischen Reste in Oktanten und Zwölftel für beliebige Primzahlen — außer der Verteilung in Zwölftel für die Primzahlen von der Form $4n+3$. Der Beweis ist von *Dedekind* unter den Bemerkungen zur Abhandlung „De nexu u. s. w. in demselben Bande gegeben, und der Beweis zeigt auch, wie man ähnliche Formeln für die Verteilung in Zwölftel für Primzahlen von der Form $4n+3$ herleiten kann.

Wenn P eine positive, ungerade und durch kein Quadrat teilbare Zahl ist, so werden wir mit C_1, C_2, C_3, C_5, C_6 u. s. w. die Anzahl der nicht eigentlich äquivalenten eigentlich primitiven Formen für die Determinanten $-P, -2P, -3P, -5P, -6P$ u. s. w. bezeichnen.

Mit S_r^n bezeichne ich $\Sigma\left(\frac{s_r}{P}\right)$, setze also $S_r^n = \Sigma\left(\frac{s_r}{P}\right)$, wo s_r alle ganzen Zahlen durchlaufen muß, welche zwischen $(r-1)\frac{P}{n}$ und $r\frac{P}{n}$ liegen.

Die Zahlen s_r im Komplex stimmen mit den Zahlen $(P-s_{n-r+1})$ im Komplex überein. Folglich ist $S_r^n = \left(\frac{-1}{P}\right) S_{n-r+1}^n$. Daraus folgt, daß man nur die ersten $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n+1)$ der Zahlen S_r^n berechnen muß.

Die Verteilung der quadratischen Reste in Oktanten ergibt sich aus folgenden Formeln:

$$C_1 = 2\,(S_1^8+S_2^8), \quad C_2 = 2\,(S_1^8-S_4^8)$$

oder

$$C_1 = S_1^8+S_2^8+S_3^8+S_4^8, \quad C_2 = 2\,(S_2^8+S_3^8),$$

je nachdem $P \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ ist, und aus

$$S_1^8 + S_2^8 = \left(\frac{2}{P}\right) S_1^8 + \left(\frac{-2}{P}\right) S_4^8,$$

$$S_3^8 + S_4^8 = \left(\frac{2}{P}\right) S_2^8 + \left(\frac{-2}{P}\right) S_3^8$$

und $S_1^8 + S_2^8 + S_3^8 + S_4^8 = 0$, $P \equiv 1 \pmod 4$. C_1 und C_2 sind von *Dirichlet**) gegeben. Die dritte und vierte Bedingung ergibt sich durch Berücksichtigung des Umstandes, daß die Zahlen s_1 und s_2 im Komplex mit den Zahlen $2s_1$ und $P-2s_4$, und ebenso die Zahlen s_3 und s_4 im Komplex mit den Zahlen $2s_2$ und $P-2s_3$ übereinstimmen *(Dedekind)*. Die Gleichung

$$S_1^8 + S_2^8 + S_3^8 + S_4^8 = S_1^2 = 0, \quad P \equiv 1 \pmod 4$$

folgt aus *Dirichlet-Dedekind* Zahlentheorie, § 52, wenn man berücksichtigt, daß $\left(\frac{-1}{P}\right) = +1$ ist für $P \equiv 1 \pmod 4$.

Die Verteilung in Zwölftel ergibt sich ähnlich. Wie vorher ist

$$C_1 = 2\,(S_1^{12} + S_2^{12} + S_3^{12}), \quad C_3 = 2\,(S_1^{12} + S_2^{12} - S_5^{12} - S_6^{12})$$

oder

$$C_1 = S_1^{12} + S_2^{12} + S_3^{12} + S_4^{12} + S_5^{12} + S_6^{12},$$

$$C_3 = 2\,(S_2^{12} + S_3^{12} + S_4^{12} + S_5^{12}),$$

je nachdem $P \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ ist.

So auch

$$S_1^{12} + S_2^{12} = \left(\frac{2}{P}\right) S_1^{12} + \left(\frac{-2}{P}\right) S_6^{12},$$

$$S_3^{12} + S_4^{12} = \left(\frac{2}{P}\right) S_2^{12} + \left(\frac{-2}{P}\right) S_5^{12},$$

$$S_5^{12} + S_6^{12} = \left(\frac{2}{P}\right) S_3^{12} + \left(\frac{-2}{P}\right) S_4^{12}$$

und ebenso

$$S_1^{12} + S_2^{12} + S_3^{12} = \left(\frac{3}{P}\right) S_1^{12} + \left(\frac{3}{P}\right) S_5^{12} + \left(\frac{-3}{P}\right) S_4^{12},$$

$$S_4^{12} + S_5^{12} + S_6^{12} = \left(\frac{3}{P}\right) S_2^{12} + \left(\frac{3}{P}\right) S_6^{12} + \left(\frac{-3}{P}\right) S_3^{12}$$

---

*) *Dirichlet*, Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres, in diesem Journal XIX und XXI.

C_1 für $P \equiv 3 \pmod 4$ vorher von *Jacobi* gefunden, Observatio arithmetica, in diesem Journal IX.

Siehe auch *Dirichlet-Dedekind*, Zahlentheorie, fünfter Abschnitt.

und im Falle $P \equiv 1 \pmod 4$ die Summe

$$S_1^{12}+S_2^{12}+S_3^{12}+S_4^{12}+S_5^{12}+S_6^{12}=0.$$

C_3 ergibt sich wie folgt:

Es sei P von der Form $12n+1$, oder $12n+5$, dann ist $3P \equiv 3 \pmod 4$; folglich ist C_3 gleich $\Sigma\left(\frac{s_r}{3P}\right)$, wo s_r alle ganzen Zahlen durchläuft, die >0 und $<\frac{3P}{2}$ sind. Daher ist für $P=12n+1$:

$$C_3=\left(\frac{1}{3P}\right)+\left(\frac{2}{3P}\right)+\left(\frac{3}{3P}\right)+\cdots+\left(\frac{18n+1}{3P}\right)$$

oder

$$=\left(\frac{1}{3}\right)\left[\left(\frac{1}{P}\right)+\left(\frac{4}{P}\right)+\left(\frac{7}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{18n+1}{P}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{P}\right)+\left(\frac{5}{P}\right)+\left(\frac{8}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{18n-1}{P}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{3}{3}\right)\left[\left(\frac{3}{P}\right)+\left(\frac{6}{P}\right)+\left(\frac{9}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{18n}{P}\right)\right]$$

oder

$$=+\left[\left(\frac{1}{P}\right)+\left(\frac{4}{P}\right)+\left(\frac{7}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{18n+1}{P}\right)\right]$$
$$-\left[\left(\frac{2}{P}\right)+\left(\frac{5}{P}\right)+\left(\frac{8}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{18n-1}{P}\right)\right]$$

oder, weil $\left(\frac{-1}{P}\right)=+1$ ist,

$$=+\left[\left(\frac{12n}{P}\right)+\left(\frac{12n-3}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{3}{P}\right)\right]+\left[\left(\frac{3}{P}\right)+\left(\frac{6}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{6n}{P}\right)\right]$$
$$-\left[\left(\frac{12n+3}{P}\right)+\left(\frac{12n+6}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{30n}{P}\right)\right]$$

oder

$$=\left(\frac{3}{P}\right)\left[\left(\frac{1}{P}\right)+\left(\frac{2}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{4n}{P}\right)\right]+\left(\frac{3}{P}\right)\left[\left(\frac{1}{P}\right)+\left(\frac{2}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{2n}{P}\right)\right]$$
$$-\left(\frac{3}{P}\right)\left[\left(\frac{4n+1}{P}\right)+\left(\frac{4n+2}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{10n}{P}\right)\right].$$

Weil aber $\left(\frac{3}{P}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)=+1$ ist, und

$$S_{10}^{12}=S_3^{12},\quad S_9^{12}=S_4^{12},\quad S_8^{12}=S_5^{12},\quad S_7^{12}=S_6^{12},$$

so ist

$$C_3=S_1^{12}+S_2^{12}+S_3^{12}+S_4^{12}+S_1^{12}+S_2^{12}-S_5^{12}-S_6^{12}-S_3^{12}-S_4^{12}-S_5^{12}-S_6^{12}$$
$$=2\,(S_1^{12}+S_2^{12}-S_5^{12}-S_6^{12}).$$

Im Falle $P = 12n+5$ ist

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = +1,\ \left(\frac{3}{P}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1,$$

$3P = 36n+15$, und s_r durchläuft alle ganzen Zahlen, die >0 und $<18n+8$ sind. Die Summen für C_3 lauten dann

$$+\left[\left(\frac{12n+6}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{30n+12}{P}\right)\right]$$

$$-\left[\left(\frac{12n+3}{P}\right)+\left(\frac{12n}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{3}{P}\right)\right]-\left[\left(\frac{3}{P}\right)+\left(\frac{6}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{6n}{P}\right)\right]$$

oder

$$-\left[\left(\frac{4n+2}{P}\right)+\left(\frac{4n+3}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{10n+4}{P}\right)\right]$$

$$+\left[\left(\frac{1}{P}\right)+\left(\frac{2}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{4n+1}{P}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{P}\right)+\left(\frac{2}{P}\right)+\cdots+\left(\frac{2n}{P}\right)\right],$$

woraus sich ebenfalls ergibt

$$C_3 = 2\,(S_1^{12}+S_2^{12}-S_5^{12}-S_6^{12}).$$

Im Falle $P \equiv 3 \pmod 4$ ist $3P \equiv 1 \pmod 4$, und infolgedessen ist C_3 gleich $\Sigma\left(\frac{s_r}{3P}\right)$, wo s_r alle ganzen Zahlen durchläuft, die der Bedingung genügen $0 < s_r < \frac{3P}{4}$. $\left(\frac{-1}{P}\right)$ ist gleich -1, und $\left(\frac{3}{P}\right) = +1$ oder -1, je nachdem P von der Form $12n+7$ oder $12n+11$ ist. Mit dieser Unterscheidung ergibt sich ganz analog für beide Fälle, daß

$$C_3 = 2\,(S_2^{12}+S_3^{12}+S_4^{12}+S_5^{12})$$

ist.

Die Formeln für die S_r^8 und S_r^{12} sind in den oben erwähnten Bemerkungen von *Dedekind* bewiesen, und gelten für jede positive, ungerade und durch kein Quadrat teilbare Zahl. In dieser Untersuchung habe ich die Formeln für die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste in den Vierundzwanzigsteln für jede positive ungerade und durch kein Quadrat teilbare Zahl, und in den Zehnteln für alle solche Zahlen, die kongruent 3 (mod. 4) sind, neu hinzugefügt.

Aus der Gleichung $S_r^n = \left(\frac{-1}{P}\right) S_{n-r+1}^n$ kann man schließen, daß für jedes ungerade n, wenn $P \equiv 3 \pmod 4$ ist und n nicht als Teiler enthält, $S_{\frac{n+1}{2}}^n = 0$ ist, und folglich, daß im $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ten n-tel die Anzahl der mit P teilerfremden Zahlen gerade ist.

In direktem Zusammenhang mit der Verteilung in Oktanten und Zwölftel steht die Verteilung in Vierundzwanzigstel. Mit Hinzufügung der Konstanten C_6 lassen sich ähnliche Formeln aufstellen.

$$C_1 = 2(S_1^{24}+S_2^{24}+S_3^{24}+S_4^{24}+S_5^{24}+S_6^{24}),$$
$$C_2 = 2(S_1^{24}+S_2^{24}+S_3^{24}-S_{10}^{24}-S_{11}^{24}-S_{12}^{24}),$$
$$C_3 = 2(S_1^{24}+S_2^{24}+S_3^{24}+S_4^{24}-S_9^{24}-S_{10}^{24}-S_{11}^{24}-S_{12}^{24}),$$
$$C_6 = 2(2S_1^{24}+S_2^{24}+S_3^{24}+S_4^{24}+S_5^{24}-S_8^{24}-S_9^{24}-S_{10}^{24}-S_{11}^{24}-2S_{12}^{24})$$

oder

$$C_1 = S_1^{24}+S_2^{24}+S_3^{24}+S_4^{24}+S_5^{24}+S_6^{24}+S_7^{24}+S_8^{24}+S_9^{24}+S_{10}^{24}+S_{11}^{24}+S_{12}^{24},$$
$$C_2 = 2(S_4^{24}+S_5^{24}+S_6^{24}+S_7^{24}+S_8^{24}+S_9^{24}),$$
$$C_3 = 2(S_3^{24}+S_4^{24}+S_5^{24}+S_6^{24}+S_7^{24}+S_8^{24}+S_9^{24}+S_{10}^{24}),$$
$$C_6 = 2(S_2^{24}+S_3^{24}+S_4^{24}+S_5^{24}+2S_6^{24}+2S_7^{24}+S_8^{24}+S_9^{24}+S_{10}^{24}+S_{11}^{24}),$$

je nachdem $P \equiv 1$ **oder** $\equiv 3 \pmod 4$ **ist.**

Ferner ist

$$S_1^{24}+S_2^{24} = \left(\frac{2}{P}\right) S_1^{24} + \left(\frac{-2}{P}\right) S_{12}^{24},$$
$$S_3^{24}+S_4^{24} = \left(\frac{2}{P}\right) S_2^{24} + \left(\frac{-2}{P}\right) S_{11}^{24},$$
$$S_5^{24}+S_6^{24} = \left(\frac{2}{P}\right) S_3^{24} + \left(\frac{-2}{P}\right) S_{10}^{24},$$
$$S_7^{24}+S_8^{24} = \left(\frac{2}{P}\right) S_4^{24} + \left(\frac{-2}{P}\right) S_9^{24},$$
$$S_9^{24}+S_{10}^{24} = \left(\frac{2}{P}\right) S_5^{24} + \left(\frac{-2}{P}\right) S_8^{24},$$
$$S_{11}^{24}+S_{12}^{24} = \left(\frac{2}{P}\right) S_6^{24} + \left(\frac{-2}{P}\right) S_7^{24}$$

und

$$S_1^{24}+S_2^{24}+S_3^{24} = \left(\frac{3}{P}\right) S_1^{24} + \left(\frac{-3}{P}\right) S_8^{24} + \left(\frac{3}{P}\right) S_9^{24},$$
$$S_4^{24}+S_5^{24}+S_6^{24} = \left(\frac{3}{P}\right) S_2^{24} + \left(\frac{-3}{P}\right) S_7^{24} + \left(\frac{3}{P}\right) S_{10}^{24},$$
$$S_7^{24}+S_8^{24}+S_9^{24} = \left(\frac{3}{P}\right) S_3^{24} + \left(\frac{-3}{P}\right) S_6^{24} + \left(\frac{3}{P}\right) S_{11}^{24},$$
$$S_{10}^{24}+S_{11}^{24}+S_{12}^{24} = \left(\frac{3}{P}\right) S_4^{24} + \left(\frac{-3}{P}\right) S_5^{24} + \left(\frac{3}{P}\right) S_{12}^{24}.$$

Es ist noch $S_1^2 = \sum_{r=1}^{12} S_r^{24} = 0, \qquad P \equiv 1 \pmod 4.$

Unter diesen elf Gleichungen gibt es in beiden Fällen acht, die von einander unabhängig sind. So lassen sich mit den vier Gleichungen von oben, für beide Fälle, die Werte S_1^{24}, S_2^{24}, S_3^{24} u. s. w. bestimmen. In Übereinstimmung mit *Gauß**) bezeichnen wir mit (r) die Anzahl der quadratischen Reste von p, die zwischen $(r-1)\frac{p}{n}$ und $r\frac{p}{n}$ liegen, worin p eine Primzahl ist.

Erster Fall: $p = 24n+1$.

$$C_1 = 2t, \quad C_2 = 2u, \quad C_3 = 6r, \quad C_6 = 2s,$$

$$(1) = (24) = \frac{1}{4}(2n+t+r+s),$$

$$(2) = (6) = (8) = (12) = (13) = (17) = (19) = (23) = \frac{1}{4}(2n+t+r-s),$$

$$(3) = (9) = (16) = (22) = \frac{1}{4}(2n-t+u-2r),$$

$$(4) = (21) = \frac{1}{4}(2n-t-u+4r),$$

$$(5) = (20) = \frac{1}{4}(2n+t-5r+s),$$

$$(7) = (11) = (14) = (18) = \frac{1}{4}(2n-3t+r+s),$$

$$(10) = (15) = \frac{1}{4}(2n+3t-u-2r).$$

Durch Addition bekommt man die Formeln für die Verteilung in Sechstel. Die Gleichungen für die S_r^6 lauten dann

$$S_1^6 = S_6^6 = \frac{1}{3}C_3.$$

$$S_2^6 = S_3^6 = S_4^6 = S_5^6 = -\frac{1}{6}C_3.$$

Zweiter Fall: $p = 24n+5$.,

$$C_1 = 2t, \quad C_2 = 2u, \quad C_3 = 6r, \quad C_6 = 4s,$$

$$(1) = (11) = (14) = (24) = \frac{1}{4}(2n-u+s),$$

$$(2) = (12) = (13) = (23) = \frac{1}{4}(2n+u-s),$$

---

*) *Gauß* Werke, Bd. II, Seite 288—291.

$$(3) = (22) = \frac{1}{4}(2n-t+u),$$

$$(4) = (21) = \frac{1}{4}(2n+t-u),$$

$$(5) = (20) = \frac{1}{4}(2n+u+s+2),$$

$$(6) = (19) = \frac{1}{4}(2n+2t-u-s),$$

$$(7) = (18) = \frac{1}{4}(2n-2t+u+s),$$

$$(8) = (17) = \frac{1}{4}(2n-u+6r-s),$$

$$(9) = (16) = \frac{1}{4}(2n+t+u-6r),$$

$$(10) = (15) = \frac{1}{4}(2n-t-u+2).$$

Die Gleichungen für die S_r^6 lauten

$$S_1^6 = S_6^6 = 0,$$
$$S_2^6 = -S_3^6 = -S_4^6 = S_5^6 = \frac{1}{2}C_3.$$

Dritter Fall: $p = 24n+13$.

$$C_1 = 2t, \quad C_2 = 2u, \quad C_3 = 4r, \quad C_6 = 4s,$$

$$(1) = (5) = (7) = (11) = (14) = (18) = (20) = (24) = \frac{1}{4}(2n-t+s),$$

$$(2) = (6) = (19) = (23) = \frac{1}{4}(2n+3t-s+2),$$

$$(3) = (22) = \frac{1}{4}(2n-3t+u),$$

$$(4) = (15) = (10) = (21) = \frac{1}{4}(2n+t-u+2),$$

$$(8) = (17) = \frac{1}{4}(2n-t+2r-s+2),$$

$$(9) = (16) = \frac{1}{4}(2n+t+u-2r),$$

$$(12) = (13) = \frac{1}{4}(2n-t-s+2).$$

Die Gleichungen für die S_r^6 lauten dann

$$S_1^6 = S_6^6 = 0.$$
$$S_2^6 = -S_3^6 = -S_4^6 = S_5^6 = +\frac{1}{2}C_3.$$

Vierter Fall: $p = 24n + 17$.

$$C_1 = 2t, \quad C_2 = 2u, \quad C_3 = 6r, \quad C_6 = 4s,$$

$$(1) = (11) = (14) = (24) = \frac{1}{4}(2n - u + r + s),$$

$$(2) = (12) = (13) = (23) = \frac{1}{4}(2n + u + r - s + 2),$$

$$(3) = (22) = \frac{1}{4}(2n + t + u - 2r + 2),$$

$$(4) = (21) = \frac{1}{4}(2n - t - u + 4r),$$

$$(5) = (20) = \frac{1}{4}(2n + u - 5r + s + 2),$$

$$(6) = (19) = \frac{1}{4}(2n + 2t - u + r - s + 2),$$

$$(7) = (18) = \frac{1}{4}(2n - 2t + u + r + s),$$

$$(8) = (17) = \frac{1}{4}(2n - u + r - s + 2),$$

$$(9) = (16) = \frac{1}{4}(2n - t + u - 2r + 2),$$

$$(10) = (15) = \frac{1}{4}(2n - u + r + s).$$

Die Gleichungen für die S_r^6 lauten:

$$S_1^6 = S_6^6 = \frac{1}{3}C_3,$$

$$S_2^6 = S_3^6 = S_4^6 = S_5^6 = -\frac{1}{6}C_3.$$

Fünfter Fall: $p = 24n + 7$.

$$C_1 = t, \quad C_2 = 4u, \quad C_3 = 4r, \quad C_6 = 4s,$$

$$(1) = (8) = \frac{1}{4}(2n + 2t - r - s),$$

$$(2) = (6) = (13) = (20) = \frac{1}{4}(2n - r + s),$$

$$(3) = (10) = \frac{1}{4}(2n - 2u + 2r),$$

$$(4) = \frac{1}{4}(2n + 2u + 2),$$

$$(5) = (12) = (19) = (23) = \frac{1}{4}(2n+r-s),$$

$$(7) = \frac{1}{4}(2n+r+s+2),$$

$$(9) = \frac{1}{4}(2n-2t+2u),$$

$$(11) = \frac{1}{4}(2n-3r+s+2),$$

$$(14) = \frac{1}{4}(2n+3r-s+2),$$

$$(15) = (22) = \frac{1}{4}(2n+2u-2r),$$

$$(16) = = \frac{1}{4}(2n+2t-2u),$$

$$(17) = (24) = \frac{1}{4}(2n-2t+r+s),$$

$$(18) = \frac{1}{4}(2n-r-s+2),$$

$$(21) = \frac{1}{4}(2n-2u+2).$$

Die Gleichungen für die S_r^6 lauten

$$S_1^6 = S_2^6 = S_4^6 = C_1,$$
$$S_3^6 = S_5^6 = S_6^6 = -C_1.$$

Dieser Fall ist besonders bemerkenswert, weil alle sechs Werte S_1^6, S_2^6, S_3^6 u. s. w. denselben absoluten Wert haben.

Sechster Fall: $p = 24n+11$.

$$C_1 = 3t, \quad C_2 = 2u, \quad C_3 = 4r, \quad C_6 = 4s,$$

$$(1) = \frac{1}{4}(2n+2t-u+r-s),$$

$$(2) = \frac{1}{4}(2n+u-3r+s),$$

$$(3) = \frac{1}{4}(2n+t-u+2r+2),$$

$$(4) = \frac{1}{4}(2n-t+u),$$

$$(5) = \frac{1}{4}(2n+u-r-s+2),$$

$$(6) = \frac{1}{4}(2n-2t-u+r+s),$$

$$(7) = \frac{1}{4}(2n+2t-u-r+s+2),$$

$$(8) = \frac{1}{4}(2n+u+r-s),$$

$$(9) = \frac{1}{4}(2n+t+u+2),$$

$$(10) = \frac{1}{4}(2n-t-u+2r),$$

$$(11) = \frac{1}{4}(2n+u-r+s+2),$$

$$(12) = \frac{1}{4}(2n+4t-u-r-s),$$

$$(13) = \frac{1}{4}(2n-4t+u+r+s),$$

$$(14) = \frac{1}{4}(2n-u+r-s+2),$$

$$(15) = \frac{1}{4}(2n+t+u-2r),$$

$$(16) = \frac{1}{4}(2n-t-u+2),$$

$$(17) = \frac{1}{4}(2n-u-r+s),$$

$$(18) = \frac{1}{4}(2n-2t+u+r-s+2),$$

$$(19) = \frac{1}{4}(2n+2t+u-r-s),$$

$$(20) = \frac{1}{4}(2n-u+r+s+2),$$

$$(21) = \frac{1}{4}(2n+t-u),$$

$$(22) = \frac{1}{4}(2n-t+u-2r+2),$$

$$(23) = \frac{1}{4}(2n-u+3r-s),$$

$$(24) = \frac{1}{4}(2n-2t+u-r+s).$$

$$S_1^6 = -S_6^6 = \frac{1}{3}C_1, \quad S_2^6 = S_5^6 = 0, \quad S_3^6 = -S_4^6 = \frac{2}{3}C_1.$$

Siebenter Fall: $p = 24n+19$.

$$C_1 = t, \quad C_2 = 2u, \quad C_3 = 4r, \quad C_6 = 4s,$$

$$(1) = \frac{1}{4}(2n+t+r-s),$$

$$(2) = \frac{1}{4}(2n+3t-3r+s+2),$$

$$(3) = \frac{1}{4}(2n-t-u+2r+2),$$

$$(4) = \frac{1}{4}(2n-5t+u+2),$$

$$(5) = \frac{1}{4}(2n+3t-r-s),$$

$$(6) = \frac{1}{4}(2n-t+r+s+2),$$

$$(7) = \frac{1}{4}(2n+t-r+s+2),$$

$$(8) = (14) = \frac{1}{4}(2n+3t+r-s+2),$$

$$(9) = \frac{1}{4}(2n-t+u+2),$$

$$(10) = \frac{1}{4}(2n+t-u+2r),$$

$$(11) = (17) = \frac{1}{4}(2n-3t-r+s+2),$$

$$(12) = \frac{1}{4}(2n+5t-r-s+2),$$

$$(13) = \frac{1}{4}(2n-5t+r+s+2),$$

$$(15) = \frac{1}{4}(2n-t+u-2r),$$

$$(16) = \frac{1}{4}(2n+t-u+2),$$

$$(18) = \frac{1}{4}(2n-t+r-s+2),$$

$$(19) = \frac{1}{4}(2n+t-r-s+2),$$

$$(20) = \frac{1}{4}(2n-3t+r+s),$$

$$(21) = \frac{1}{4}(2n+5t-u+2),$$

$$(22) = \frac{1}{4}(2n+t+u-2r+2),$$

$$(23) = \frac{1}{4}(2n-3t+3r-s+2),$$

$$(24) = \frac{1}{4}(2n-t-r+s).$$

Die Gleichungen für die S_r^6 lauten

$$S_1^6 = -S_3^6 = S_4^6 = -S_6^6 = -\frac{1}{3}C_1,$$
$$S_2^6 = -S_5^6 = C_1.$$

Achter Fall: $p = 24n+23$.

$$C_1 = t, \quad C_2 = 4u, \quad C_3 = 4r, \quad C_6 = 4s,$$

$$(1) = \frac{1}{4}(2n+2t-2u-r-s),$$

$$(2) = (13) = \frac{1}{4}(2n+2u-r+s+2),$$

$$(3) = (10) = \frac{1}{4}(2n-2u+2r+2),$$

$$(4) = (9) = \frac{1}{4}(2n+2u+2),$$

$$(5) = (19) = \frac{1}{4}(2n+2u+r-s+2),$$

$$(6) = (20) = \frac{1}{4}(2n-2u-r+s+2),$$

$$(7) = (17) = \frac{1}{4}(2n-2u+r+s+2),$$

$$(8) = (18) = \frac{1}{4}(2n+2u-r-s+2),$$

$$(11) = \frac{1}{4}(2n+2u-3r+s+2),$$

$$(12) = (23) = \frac{1}{4}(2n-2u+r-s+2),$$

$$(14) = \frac{1}{4}(2n-2u+3r-s+2),$$

$$(15) = (22) = \frac{1}{4}(2n+2u-2r+2),$$

$$(16) = (21) = \frac{1}{4}(2n-2u+2),$$

$$(24) = \frac{1}{4}(2n-2t+2u+r+s).$$

Die Gleichungen für die S_r^6 lauten:

$$S_1^6 = -S_6^6 = C_1,$$

$$S_2^6 = S_3^6 = S_4^6 = S_5^6 = 0.$$

Dieser Fall ist bemerkenswert, weil die vier auf einander folgenden Werte S_2^6, S_3^6, S_4^6 und S_5^6 alle gleich Null sind.

Es ist zu bemerken, daß sich die Perioden (3), (4), (9) und (10), die sich aus der Verteilung in Oktanten und Zwölftel ergeben, in diesen Formeln von C_6 ganz unabhängig zeigen.

Die Gleichungen, aus denen sich diese Formeln ergeben, zeigen auch, daß für alle Zahlen von der Form $24n+11$, und $24n+19$ die Summe $S_1^{24}+S_2^{24}+S_3^{24}+S_4^{24}+S_5^{24}+S_6^{24}$ gleich Null ist. Dieser Satz läßt sich leicht beweisen für alle Zahlen von der Form $8n+3$. Da die Zahlen $2s_1^8$ und $P-2s_4^8$ mit s_1^8 und s_2^8, sowie $2s_2^8$ und $P-2s_3^8$ im Komplex mit s_3^8 und s_4^8 übereinstimmen, folgt

$$S_1^8+S_2^8 = -S_1^8+S_4^8,$$

$$S_3^8+S_4^8 = -S_2^8+S_3^8,$$

und daraus $S_1^8+S_2^8$ oder $S_1^4 = 0$, oder für alle Primzahlen von der Form $8n+3$ ist die Anzahl der quadratischen Reste gleich der Anzahl der quadratischen Nichtreste im ersten Viertel. Für Zahlen von der Form $8n+7$ ergibt sich ähnlich, daß die Anzahl der Reste im zweiten Viertel gleich der Anzahl der Nichtreste in demselben Viertel ist, weil $S_2^4 = 0$ ist.

Die Gleichungen geben uns in vielen Fällen Näheres über die Klassenanzahl, z. B. daß C_3 für alle Zahlen von der Form $24n+1$, ~~$24n+5$~~ und $24n+17$ ein Vielfaches von 6 ist, u. s. w.

Noch eine Verteilung läßt sich durchführen. Man bemerkt, daß C_1 und C_5 lineare Funktionen sind von den Verteilungen in den Zehnteln bei Zahlen, die kongruent 3 (mod. 4) sind, nämlich

$$C_1 = S_1^{10}+S_2^{10}+S_3^{10}+S_4^{10}+S_5^{10},$$

$$C_5 = 2S_2^{10}+4S_3^{10}+2S_4^{10}.$$

Bemerkt man ferner, daß die Zahlen

s_1^{10} und s_2^{10} im Komplex mit den Zahlen $2s_1^{10}$ und $P-2s_5^{10}$,

s_3^{10} und s_4^{10} im Komplex mit den Zahlen $2s_2^{10}$ und $P-2s_4^{10}$

und

$s_1^{10}, s_2^{10}, s_3^{10}, s_4^{10}, s_5^{10}$ mit $5s_1^{10}$, $2P-5s_4^{10}$, $5s_3^{10}-P$, $P-5s_2^{10}$, und $5s_5^{10}-2P$

übereinstimmen, so ergeben sich für alle Fälle drei von einander unabhängige Gleichungen. Diese Gleichungen stellen sich folgendermaßen dar:

$$S_1^{10}+S_2^{10}=\left(\frac{2}{P}\right)S_1^{10}+\left(\frac{-2}{P}\right)S_5^{10},$$

$$S_3^{10}+S_4^{10}=\left(\frac{2}{P}\right)S_2^{10}+\left(\frac{-2}{P}\right)S_4^{10},$$

$$S_1^{10}+S_2^{10}+S_3^{10}+S_4^{10}+S_5^{10}=\left(\frac{5}{P}\right)S_1^{10}+\left(\frac{-5}{P}\right)S_4^{10}+\left(\frac{5}{P}\right)S_3^{10}+\left(\frac{-5}{P}\right)S_2^{10}+\left(\frac{5}{P}\right)S_5^{10}.$$

Daraus und aus den ersten zwei Gleichungen folgen die Formeln für die Verteilung in Zehntel der quadratischen Reste von beliebigen Primzahlen, die kongruent 3 (mod. 4) sind. Für beliebige ungerade Zahlen, die keinen Quadratfaktor enthalten, lauten die Formeln, wie folgt:

$$P=40n+3 \qquad \text{oder} \qquad P=40n+27.$$

$$S_1^{10}=S_{10}^{10}=0,$$

$$S_2^{10}=S_5^{10}=S_8^{10}=\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{4}C_5,$$

$$S_3^{10}=S_6^{10}=S_9^{10}=-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{4}C_5,$$

$$S_4^{10}=\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{4}C_5,$$

$$S_7^{10}=-\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{4}C_5.$$

$$P=40n+7 \qquad \text{oder} \qquad =40n+23.$$

$$S_1^{10}=C_1-\frac{1}{6}C_5,$$

$$S_2^{10}=S_6^{10}=\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{12}C_5,$$

$$S_3^{10}=-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{4}C_5,$$

$$S_4^{10}=\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{12}C_5,$$

$$S_5^{10} = S_7^{10} = S_9^{10} = -\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{12}C_5.$$

$$S_8^{10} = \frac{1}{2}C_1 - \frac{1}{4}C_5,$$

$$S_{10}^{10} = -C_1 + \frac{1}{6}C_5.$$

$P = 40n+11$ oder $40n+19$.

$$S_1^{10} = \frac{1}{3}C_1.$$

$$S_2^{10} = S_7^{10} = S_8^{10} = -\frac{1}{4}C_5,$$

$$S_3^{10} = S_4^{10} = S_9^{10} = \frac{1}{4}C_5,$$

$$S_5^{10} = \frac{2}{3}C_1 - \frac{1}{4}C_5,$$

$$S_6^{10} = -\frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{4}C_5,$$

$$S_{10}^{10} = -\frac{1}{3}C_1,$$

$P = 40n+31$ oder $40n+39$.

$$S_1^{10} = C_1 - \frac{1}{6}C_5,$$

$$S_2^{10} = S_6^{10} = S_7^{10} = \frac{1}{12}C_5,$$

$$S_3^{10} = \frac{1}{4}C_5,$$

$$S_4^{10} = S_5^{10} = S_9^{10} = -\frac{1}{12}C_5,$$

$$S_8^{10} = -\frac{1}{4}C_5,$$

$$S_{10}^{10} = -C_1 + \frac{1}{6}C_5.$$

Aus diesen Formeln kann man verschiedene Sätze über die Zahlen, die nicht prim zum Modul sind, ableiten. Für Zahlen von der Form $40n+3$ oder $40n+27$ ist die Anzahl der Zahlen, die nicht prim zum Modul sind, im ersten Zehntel eine gerade Zahl. Für Zahlen von der Form $40n+11$ oder $40n+19$ ist die Anzahl der Zahlen im ersten Zehntel,

die nicht relativ prim zum Modul sind, eine gerade oder eine ungerade Zahl, je nachdem C_1 eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, u. s. w.

Die korrespondierenden Formeln für Primzahlen folgen.

Erster Fall: $p = 40n+3$.

$$C_1 = t,\ C_5 = 2v,$$

$$(1) = (10) = 2n,$$

$$(2) = (5) = (8) = \frac{1}{4}(8n+t-v),$$

$$(3) = (6) = (9) = \frac{1}{4}(8n-t+v),$$

$$(4) = \frac{1}{4}(8n+t+v+2),$$

$$(7) = \frac{1}{4}(8n-t-v+2).$$

Zweiter Fall: $p = 40n+27$.

$$C_1 = t,\ C_5 = 2v,$$

$$(1) = (10) = 2n+1,$$

$$(2) = (5) = (8) = \frac{1}{4}(8n+t-v+6),$$

$$(3) = (6) = (9) = \frac{1}{4}(8n-t+v+6),$$

$$(4) = \frac{1}{4}(8n+t+v+4),$$

$$(7) = \frac{1}{4}(8n-t-v+4).$$

Dritter Fall: $p = 40n+7$.

$$C_1 = t,\ C_5 = 6v,$$

$$(1) = \frac{1}{2}(4n+t-v),$$

$$(2) = (6) = \frac{1}{4}(8n+t-v+2),$$

$$(3) = \frac{1}{4}(8n-t+3v+2),$$

$$(4) = \frac{1}{4}(8n+t-v),$$

$$(5) = (9) = \frac{1}{4}(8n-t+v+2),$$

$$(7) = \frac{1}{4}(8n-t+v),$$

$$(8) = \frac{1}{4}(8n+t-3v+2),$$

$$(10) = \frac{1}{2}(4n-t+v).$$

Vierter Fall: $p = 40n+23$.

$$C_1 = t,\ C_5 = 6v,$$

$$(1) = \frac{1}{2}(4n+t-v+2),$$

$$(2) = (6) = \frac{1}{4}(8n+t-v+4),$$

$$(3) = \frac{1}{4}(8n-t+3v+4),$$

$$(4) = \frac{1}{4}(8n+t-v+6),$$

$$(5) = (9) = \frac{1}{4}(8n-t+v+4),$$

$$(7) = \frac{1}{4}(8n-t+v+6),$$

$$(8) = \frac{1}{4}(8n+t-3v+4),$$

$$(10) = \frac{1}{4}(8n-2t+2v+4).$$

Fünfter Fall: $p = 40n+11$.

$$C_1 = 3t,\ C_5 = 4v,$$

$$(1) = \frac{1}{2}(4n+t+1),$$

$$(2) = (7) = (8) = \frac{1}{4}(8n-2v+2),$$

$$(3) = (4) = (9) = \frac{1}{4}(8n+2v+2),$$

$$(5) = \frac{1}{4}(8n+4t-2v+2),$$

$$(6) \qquad = \frac{1}{4}(8n-4t+2v+2),$$

$$(10) \qquad = \frac{1}{2}(4n-t+1).$$

Sechster Fall: $p = 40n+19$.

$$C_1 = 3t,\ C_5 = 8v,$$

$$(1) \qquad = \frac{1}{2}(4n+t+1),$$

$$(2) = (7) = (8) = \frac{1}{4}(8n-4v+4),$$

$$(3) = (4) = (9) = \frac{1}{4}(8n+4v+4),$$

$$(5) \qquad = \frac{1}{4}(8n+4t-4v+4),$$

$$(6) \qquad = \frac{1}{4}(8n-4t+4v+4),$$

$$(10) \qquad = \frac{1}{2}(4n-t+1).$$

Siebenter Fall: $p = 40n+31$.

$$C_1 = t,\ C_5 = 12v,$$

$$(1) \qquad = \frac{1}{2}(4n+t-2v+3),$$

$$(2) = (6) = (7) = \frac{1}{2}(4n+v+3),$$

$$(3) \qquad = \frac{1}{2}(4n+3v+3),$$

$$(4) = (5) = (9) = \frac{1}{2}(4n-v+3),$$

$$(8) \qquad = \frac{1}{2}(4n-3v+3),$$

$$(10) \qquad = \frac{1}{2}(4n-t+2v+3).$$

Achter Fall: $p = 40n+39$.

$$C_1 = t,\ C_5 = 24v,$$

$$(1) \qquad = \frac{1}{2}(4n+t-4v+3),$$

$$(2) = (6) = (7) = \frac{1}{2}(4n+2v+4),$$

$$(3) = \frac{1}{2}(4n+6v+4),$$

$$(4) = (5) = (9) = \frac{1}{2}(4n-2v+4),$$

$$(8) = \frac{1}{2}(4n-6v+4),$$

$$(10) = \frac{1}{2}(4n-t+2v+3).$$

Zur Geschichte unseres Problems ist noch folgendes zu bemerken: In letzter Zeit sind drei interessante Arbeiten von *Glaisher* auf diesem Gebiete erschienen.

Glaisher: Quarterly Journal of Mathematics,

Vol. 33, pp. 289 u. f., Formulae derived from *Gauss*'s Sums, with application to the series connected with the number of classes of a binary form;

Vol. 34, No. 1, On the distribution of the numbers for which

$$\left(\frac{s}{P}\right) = 1 \text{ or } -1$$

in the octants, quadrants, etc. of P;

Vol. 34, Numbers 2 and 3, On the expressions for the number of classes of a negative determinant, and on the numbers of positives in the octants of P;

und von *G. Osborn*, Messenger of Mathematics, July, 1895, Some properties of the quadratic residues of primes.

Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen.

(Von Herrn *J. Schur* in Berlin.)

Das Problem der Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen bei gegebener Variabelnzahl n ($n > 1$) gehört zu den schwierigsten Problemen der Algebra und hat bis jetzt nur für die binären und ternären Substitutionsgruppen seine vollständige Lösung gefunden.*) Für den allgemeinen Fall ist nur bekannt, daß die Anzahl der in Betracht kommenden Typen von Gruppen eine endliche ist;**) dagegen fehlt noch jede Übersicht über die charakteristischen Eigenschaften dieser Gruppen.

Die Umkehrung dieses Problems bildet in einem gewissen Sinne die Aufgabe: alle Gruppen von höchstens h ganzen oder gebrochenen linearen Substitutionen zu finden, die einer gegebenen endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung h ein- oder mehrstufig isomorph sind, oder auch, wie man sagt, alle Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch lineare Substitutionen zu bestimmen.

Diese Aufgabe hat nun im Gegensatz zu der zuerst genannten eine erfolgreiche Behandlung gefunden, indem die Herren *Molien****) und *Frobenius*†) gezeigt haben, daß das Problem der Bestimmung aller Darstellungen der

*) Vergl. *A. Wiman*, Encykl. d. math. Wiss., Bd. I, S. 522.

**) *C. Jordan*, dieses Journal, Bd. 84, S. 89.

***) Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft zu Dorpat, 1897, S. 259.

†) „Über Gruppencharaktere“, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1896, S. 985; „Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante“, ebenda, S. 1343; „Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen“, ebenda, 1897, S. 994; „Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen II.“, ebenda, 1899, S. 482. — Diese Abhandlungen werde ich im Folgenden mit „Gruppencharaktere“, „Primfaktoren“, „D. I.“ und „D. II.“ zitieren.

Gruppe $\mathfrak{H}$ durch ganze lineare Substitutionen identisch ist mit dem Problem, die Gruppenmatrix von $\mathfrak{H}$ in nicht weiter zerlegbare Teilmatrizen zu zerfällen. Den ersten und wesentlichsten Schritt zur Lösung dieser Aufgabe bildet, wie sich aus den Untersuchungen des Herrn *Frobenius* ergeben hat, die Zerlegung der Gruppendeterminante von $\mathfrak{H}$ in ihre Primfaktoren oder, was in der Hauptsache dasselbe ist, die Berechnung der Gruppencharaktere von $\mathfrak{H}$.

In der vorliegenden Abhandlung habe ich auseinanderzusetzen versucht, in welcher Weise sich auch das Problem, alle Darstellungen einer gegebenen endlichen Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen zu bestimmen, mit Hilfe der Theorie der Gruppenmatrix und der Gruppencharaktere behandeln läßt.

Ordnet man den h verschiedenen Elementen $A, B, \ldots$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ die h linearen Substitutionen von nicht verschwindender Determinante

$$\{A\} \qquad x_\nu = \frac{a_{\nu 1} y_1 + \cdots + a_{\nu, n-1} y_{n-1} + a_{\nu n}}{a_{n1} y_1 + \cdots + a_{n, n-1} y_{n-1} + a_{nn}}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\{B\} \qquad x_\nu = \frac{b_{\nu 1} y_1 + \cdots + b_{\nu, n-1} y_{n-1} + b_{\nu n}}{b_{n1} y_1 + \cdots + b_{n, n-1} y_{n-1} + b_{nn}}, \quad \ldots$$

zu, so bilden dieselben eine Darstellung der Gruppe, wenn für je zwei Elemente A, B von $\mathfrak{H}$ die Gleichung $\{A\}\{B\} = \{AB\}$ besteht. Bezeichnet man die Matrizen $(a_{ik}), (b_{ik}), \ldots$ mit $(A), (B), \ldots$, so wird die Matrix $(A)(B)$ sich von der Matrix (AB) nur um einen konstanten Faktor, der auch gleich 1 sein kann, unterscheiden. Umgekehrt entspricht auch jedem System von Matrizen, deren Determinanten sämtlich von Null verschieden sind, und welche die Eigenschaft besitzen, daß für je zwei Elemente A, B der Gruppe eine Gleichung der Form $(A)(B) = r_{A,B}(AB)$ besteht, wo die Größen $r_{A,B}$ Konstanten bedeuten, eine Darstellung der Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen. Ich werde daher im Folgenden jedes so beschaffene System von Matrizen selbst als eine Darstellung der Gruppe durch lineare Substitutionen, und zwar als eine zu dem Zahlensystem $r_{A,B}$ gehörende bezeichnen. Der Grad n der Matrizen $(A), (B), \ldots$ soll der *Grad* der Darstellung genannt werden. Sind insbesondere alle Faktoren $r_{A,B}$ gleich 1, so entspricht dem System der Matrizen $(A), (B), \ldots$ auch eine Darstellung der Gruppe durch die ganzen linearen Substitutionen

$$x_\nu = a_{\nu 1} y_1 + a_{\nu 2} y_2 + \cdots + a_{\nu n} y_n, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_\nu = b_{\nu 1} y_1 + b_{\nu 2} y_2 + \cdots + b_{\nu n} y_n, \ldots .$$

Zwei Darstellungen $(A), (B), \ldots$ und $(A'), (B'), \ldots$, für die sich h Konstanten $a, b, \ldots$ bestimmen lassen, so daß $(A') = a(A)$, $(B') = b(B), \ldots$ wird, sind, da ihnen dasselbe System von gebrochenen linearen Substitutionen entspricht, als nicht wesentlich verschieden anzusehen. Zwei solche Darstellungen sollen im Folgenden als einander *assoziiert* bezeichnet werden.

Die Begriffe der *Äquivalenz* und der *Primitivität* sind ebenso wie bei den Darstellungen durch ganze lineare Substitutionen zu definieren (vergl. *Frobenius*, D. II.): Zwei Darstellungen $(A), (B), \ldots$ und $(A'), (B'), \ldots$ sind einander *äquivalent*, wenn sich eine Matrix P von nicht verschwindender Determinante angeben läßt, so daß

$$(A') = P^{-1}(A)P, \ (B') = P^{-1}(B)P, \ldots$$

wird; zwei äquivalente Darstellungen gehören also zu demselben Zahlensystem $r_{A,B}$. Eine Darstellung ist ferner *primitiv*, wenn sich keine ihr äquivalente Darstellung $(A'), (B'), \ldots$ der Form

$$(A') = \begin{pmatrix} (A_1), & 0 \\ 0, & (A_2) \end{pmatrix}, \quad (B') = \begin{pmatrix} (B_1), & 0 \\ 0, & (B_2) \end{pmatrix}, \ldots$$

bestimmen läßt, wo $(A_1), (B_1), \ldots$ Matrizen desselben Grades bedeuten.

Für die primitiven Darstellungen einer Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen gilt der analoge Satz wie für die Darstellungen durch ganze lineare Substitutionen (*Frobenius*, Primfaktoren, § 12), daß ihr Grad stets ein Divisor der Ordnung von $\mathfrak{H}$ ist (§ 4).

Die Untersuchung der Darstellungen einer Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen steht in engster Beziehung zu der Theorie der invarianten Elemente der endlichen Gruppen.

Ist $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe, welche eine aus invarianten Elementen von $\mathfrak{G}$ bestehende Untergruppe $\mathfrak{A}$ derart enthält, daß $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ der gegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ (einstufig) isomorph ist, so sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}A' + \mathfrak{A}B' + \cdots,$$

und es mögen die Komplexe $\mathfrak{A}A', \mathfrak{A}B', \ldots$ den Elementen $A, B, \ldots$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ entsprechen. — Eine solche Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichne ich im Folgenden als eine *durch die Gruppe* $\mathfrak{A}$ *ergänzte Gruppe von* $\mathfrak{H}$, wofür ich auch kürzer schreibe, $\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe $(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$. — Betrachtet man eine beliebige primitive Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch ganze lineare Substitutionen, so besitzt jede einem Element J von $\mathfrak{A}$ entsprechende Matrix die Form $j(E)$, wo j

eine Einheitswurzel und (E) die Einheitsmatrix bedeuten, und die den Elementen $A', B', \ldots$ entsprechenden Matrizen $(A'), (B'), \ldots$ bilden in dem oben definierten Sinne eine (primitive) Darstellung der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen.

Es lassen sich nun auch ergänzte Gruppen $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ angeben, die so beschaffen sind, daß jede primitive Darstellung von $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen (oder eine ihr assoziierte Darstellung) mindestens einer der in der erwähnten Weise durch die Gruppe $\mathfrak{G}$ gelieferten Darstellungen von $\mathfrak{H}$ äquivalent ist. Eine ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$, welche diese Eigenschaft besitzt, nenne ich eine *hinreichend ergänzte* Gruppe, eine hinreichend ergänzte Gruppe, deren Ordnung möglichst klein ist, eine *Darstellungsgruppe* der Gruppe $\mathfrak{H}$.

Einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ können auch mehrere einander nicht isomorphe Darstellungsgruppen $\mathfrak{G}$ entsprechen. Dagegen sind die (aus invarianten Elementen bestehenden) Untergruppen $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$, für die $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{H}$ ist, in allen Darstellungsgruppen von $\mathfrak{H}$ einander isomorph. Es entspricht auf diese Weise jeder Gruppe $\mathfrak{H}$ eine wohlbestimmte *Abel*sche Gruppe, die ich als den *Multiplikator* der Gruppe $\mathfrak{H}$ bezeichne. Eine Gruppe, deren Multiplikator die Einheitsgruppe ist, nenne ich eine *abgeschlossene* Gruppe (§§ 1—3).

Man hat demnach, um die sämtlichen primitiven Darstellungen einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen zu erhalten, in erster Linie eine Darstellungsgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ zu bestimmen, was als ein rein gruppentheoretisches Problem aufzufassen ist, und alsdann nach den von Herrn *Frobenius* angegebenen Methoden die primitiven Darstellungen von $\mathfrak{G}$ durch ganze lineare Substitutionen zu untersuchen. Insbesondere läßt sich also für eine abgeschlossene Gruppe jede Darstellung durch gebrochene lineare Substitutionen durch eine Darstellung durch ganze lineare Substitutionen ersetzen.

In § 5 entwickle ich einige Sätze, welche in speziellen Fällen zur Bestimmung des Multiplikators und der Darstellungsgruppen einer gegebenen Gruppe dienen können.

Die hier dargestellte allgemeine Theorie soll in einer später erscheinenden Arbeit weiter verfolgt und auf einige spezielle Klassen von Gruppen angewendet werden.

§ 1.

Es sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe der Ordnung h, deren Elemente $H_0 = E, H_1, \ldots, H_{h-1}$ sind. Es mögen die Matrizen $(H_0), (H_1), \ldots, (H_{h-1})$ eine zu dem Zahlensystem $r_{P,Q}$ gehörende Darstellung von $\mathfrak{H}$ bilden, d. h. den h^2 Gleichungen

$$(1.) \qquad (P)(Q) = r_{P,Q}\,(PQ) \qquad (P, Q = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$$

genügen. Sind P, Q, R drei beliebige Elemente der Gruppe, so ist die Matrix $(P)(Q)(R)$ nach dem assoziativen Gesetz einerseits gleich

$$r_{P,Q}\,(PQ)(R) = r_{P,Q}\,r_{PQ,R}\,(PQR),$$

andererseits aber auch gleich

$$r_{Q,R}\,(P)(QR) = r_{P,QR}\,r_{Q,R}\,(PQR).$$

Die h^2 Größen $r_{P,Q}$ müssen daher den h^3 Gleichungen

$$(A.) \qquad r_{P,Q}\,r_{PQ,R} = r_{P,QR}\,r_{Q,R} \qquad (P, Q, R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$$

genügen.

Umgekehrt läßt sich für jedes System von h^2 nicht verschwindenden Zahlen $r_{P,Q}$, welche den Gleichungen $(A.)$ genügen, eine Darstellung von $\mathfrak{H}$ angeben, die zu dem Zahlensystem $r_{P,Q}$ gehört. Um dies zu beweisen, führe ich h unabhängige Variable $x_{H_0}, x_{H_1}, \ldots, x_{H_{h-1}}$ ein und betrachte die Matrix h-ten Grades

$$X = (r_{PQ^{-1},Q}\,x_{PQ^{-1}}),$$

deren Zeilen und Spalten man erhält, indem man für P und Q der Reihe nach die h Elemente $H_0, H_1, \ldots, H_{h-1}$ setzt. Offenbar läßt sich X in der Form

$$X = \Sigma\,(R)\,x_R$$

schreiben, wo die Summe über alle Elemente von $\mathfrak{H}$ zu erstrecken ist, und das Zeichen (R) eine gewisse Matrix h-ten Grades bedeutet, die man dadurch erhält, daß man in X die Variable x_R gleich 1, die übrigen Variabeln gleich 0 setzt. Ich will zeigen, daß die so erhaltenen h Matrizen $(H_0), (H_1), \ldots, (H_{h-1})$ den Gleichungen (1.) genügen.

Es seien nämlich $y_{H_0}, y_{H_1}, \ldots, y_{H_{h-1}}$ eine andere Reihe von unabhängigen Variabeln, ferner mögen die h Größen $z_{H_0}, z_{H_1}, \ldots, z_{H_{h-1}}$ durch die Gleichungen

$$z_P = \Sigma\,r_{R,S}\,x_R\,y_S, \qquad (P = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$$

– die Summe über alle Elemente R und S erstreckt, die der Gleichung

$RS = P$ genügen, — bestimmt sein. Es möge X in Y und Z übergehen, wenn man die Variabeln x_P durch y_P und z_P ersetzt. Dann wird

$$XY = (\sum_R r_{PR^{-1},R}\, r_{RQ^{-1},Q}\, x_{PR^{-1}}\, y_{RQ^{-1}}).$$

Nun ist aber nach $(A.)$

$$r_{PR^{-1},RQ^{-1}}\, r_{PQ^{-1},Q} = r_{PR^{-1},R}\, r_{RQ^{-1},Q}.$$

Daher ist

$$\sum_R r_{PR^{-1},R}\, r_{RQ^{-1},Q}\, x_{PR^{-1}}\, y_{RQ^{-1}} = r_{PQ^{-1},Q} \sum_R r_{PR^{-1},RQ^{-1}}\, x_{PR^{-1}}\, y_{RQ^{-1}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber gleich $r_{PQ^{-1},Q}\, z_{PQ^{-1}}$. Wir erhalten daher

$$XY = (r_{PQ^{-1},Q}\, z_{PQ^{-1}}) = Z$$

oder

$$\sum_{R,S} (R)(S)\, x_R\, y_S = \sum_T (T)\, z_T = \sum_{R,S} r_{R,S}\, (RS)\, x_R\, y_S.$$

Es ist daher in der Tat, wie zu beweisen war,

$$(1'.) \qquad (R)(S) = r_{R,S}\, (RS).$$

Da ferner die Matrix (R) sowohl in jeder ihrer Zeilen, als auch in jeder ihrer Spalten ein und nur ein von Null verschiedenes Element enthält, so sind auch die Determinanten $d_{H_0}, d_{H_1}, \ldots, d_{H_{h-1}}$ der Matrizen $(H_0), (H_1), \ldots, (H_{h-1})$ sämtlich von Null verschieden.*) Aus der Gleichung (1'.) ergibt sich noch, indem man auf beiden Seiten die Determinanten bildet,

$$(2.) \qquad r_{R,S}^{h} = \frac{d_R\, d_S}{d_{RS}}.$$

Wir erhalten den Satz:

I. *Zu einem System von h^2 Zahlen $r_{P,Q}$ gehören dann und nur dann Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}$, wenn die Zahlen $r_{P,Q}$ den Gleichungen $(A.)$ genügen.*

Das Gleichungssystem $(A.)$ besitzt unendlich viele Lösungen. Denn bilden die Zahlen $r_{P,Q}$ eine solche Lösung, und bedeuten $c_{H_0}, c_{H_1}, \ldots, c_{H_{h-1}}$ h beliebige von Null verschiedene Größen, so genügen auch die h^2 Größen

*) Ist r die Ordnung des Elementes R von $\mathfrak{H}$, so ist, wie man leicht zeigt,

$$d_R = (-1)^{h-\frac{h}{r}} \prod_S r_{R,S}.$$

$$(3.) \qquad r'_{P,Q} = \frac{c_P c_Q}{c_{PQ}} r_{P,Q}$$

den Gleichungen (*A.*). Zwei Lösungen $r_{P,Q}$ und $r'_{P,Q}$ von (*A.*), für die sich h Größen c_P so bestimmen lassen, daß die Gleichungen (3.) erfüllt sind, sollen als einander *assoziierte* Lösungen oder auch als *assoziierte Zahlensysteme* bezeichnet werden.

Dann können, wie unmittelbar ersichtlich ist, zwei Darstellungen von $\mathfrak{H}$, die zu den Lösungen $r_{P,Q}$ und $\bar{r}_{P,Q}$ von (*A.*) gehören, nur dann einander assoziiert sein (vergl. Einleitung), wenn diese Lösungen einander assoziiert sind. Gehören dagegen zwei Darstellungen von $\mathfrak{H}$ zu zwei einander nicht assoziierten Lösungen von (*A.*), so wollen wir sagen, diese Darstellungen seien von *verschiedenem Typus*.

Denkt man sich nun alle einander assoziierten Lösungen der Gleichungen (*A.*) zu einer Klasse vereinigt, so ist die Anzahl dieser Klassen endlich. Denn sind $d_{H_0}, d_{H_1}, \ldots, d_{H_{h-1}}$ die in der Gleichung (2.) auftretenden Größen, bedeuten $\delta_{H_0}, \delta_{H_1}, \ldots, \delta_{H_{h-1}}$ irgend welche Wurzeln der h Gleichungen $\delta_P^h = d_P$, und ersetzt man die Lösung $r_{P,Q}$ durch die ihr assoziierte Lösung

$$s_{P,Q} = \frac{\delta_P^{-1}\,\delta_Q^{-1}}{\delta_{PQ}^{-1}} r_{P,Q},$$

so ist wegen (2.) $s_{P,Q}^h = 1$. Es enthält also jede Klasse auch solche Lösungen $s_{P,Q}$, für welche die Zahlen $s_{P,Q}$ sämtlich h-te Wurzeln der Einheit sind. Die Anzahl der verschiedenen Klassen ist daher jedenfalls nicht größer als $(h)^{h^2}$.

Ist diese Anzahl gleich m, so mögen die m verschiedenen Klassen von Lösungen mit $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$ bezeichnet werden. Sind $r_{P,Q}^{(\lambda)}$ und $r_{P,Q}^{(\mu)}$ zwei Lösungen von (*A.*), die den Klassen K_λ und K_μ angehören, so werden auch die Zahlen $r_{P,Q}^{(\lambda)}\, r_{P,Q}^{(\mu)}$ den Gleichungen (*A.*) genügen. Die Klasse K_ν, der diese Lösung angehört, ist offenbar von der speziellen Wahl der Lösungen $r_{P,Q}^{(\lambda)}$ und $r_{P,Q}^{(\mu)}$ innerhalb der Klassen K_λ und K_μ nicht abhängig, also durch die Klassen K_λ und K_μ vollständig bestimmt. Setzt man $K_\nu = K_\lambda K_\mu$, so ist auch $K_\mu K_\lambda = K_\nu$. Ferner folgt, wie man leicht einsieht, aus jeder Gleichung der Form $K_\alpha K_\beta = K_\alpha K_\gamma$ das Übereinstimmen der Klassen K_β und K_γ. Da nun für die festgesetzte Komposition der Klassen auch das assoziative Gesetz erfüllt ist, so definieren die m Klassen $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$ eine wohlbestimmte *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{M}$ der Ordnung m, in der als das

Einheitselement diejenige Klasse K_0 anzusehen ist, der die Lösung $r_{P,Q} = 1$ angehört. Diese Gruppe $\mathfrak{M}$ bezeichne ich als den *Multiplikator* der Gruppe $\mathfrak{H}$.*)

Die Ordnung des Multiplikators von $\mathfrak{H}$ gibt uns also an, wie viele verschiedene Typen von Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen vorhanden sind.

Die Gleichung (2.) lehrt uns, daß für jede Klasse K_λ die Gleichung $K_\lambda^h = K_0$ besteht. *Die Zahl m kann daher keinen zu h teilerfremden Primfaktor enthalten.*

§ 2.

Es sei nun $\mathfrak{G}$ eine beliebige durch eine *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe der von uns betrachteten Gruppe $\mathfrak{H}$. Setzt man

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,G_0 + \mathfrak{A}\,G_1 + \cdots + \mathfrak{A}\,G_{h-1}, \qquad (G_0 = E)$$

wobei der Komplex $\mathfrak{A}G_\lambda$ dem Element H_λ der mit $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ isomorphen Gruppe $\mathfrak{H}$ entsprechen möge, so genügen, wenn die Gruppe $\mathfrak{H}$ durch die h^2 Gleichungen

$$H_\lambda H_\mu = H_{\varphi(\lambda,\mu)} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1) \tag{4.}$$

bestimmt ist, die Elemente $G_0, G_1, \ldots, G_{h-1}$ von $\mathfrak{G}$ h^2 Relationen der Form

$$G_\lambda G_\mu = A_{\lambda,\mu}\, G_{\varphi(\lambda,\mu)}, \quad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1;\ A_{0,\lambda} = A_{\lambda,0} = E) \tag{5.}$$

wo die $A_{\lambda,\mu}$ Elemente der Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ bedeuten.

Es seien $A_0 = E$, $A_1, \ldots, A_{a-1}$ die Elemente,

$$\psi^{(0)}(A),\ \psi^{(1)}(A), \ldots, \psi^{(a-1)}(A)$$

die a Charaktere der *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{A}$. Diese Charaktere lassen sich bekanntlich stets den Elementen $A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}$ so zuordnen, daß, wenn $\psi^{(\alpha)}(A) = \psi_{A_\alpha}(A)$ gesetzt wird, für jedes A die Gleichungen

$$\psi_{A_\alpha}(A)\,\psi_{A_\beta}(A) = \psi_{A_\alpha A_\beta}(A) \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, a-1) \tag{6).}$$

bestehen.**)

Ist uns nun eine beliebige primitive Darstellung D der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch ganze lineare Substitutionen gegeben, bei der dem Element R von $\mathfrak{G}$

---

*) Daß diese Definition des Multiplikators mit der in der Einleitung gegebenen übereinstimmt, wird sich aus dem Folgenden ergeben.

**) Vergl. *Weber*, Lehrbuch der Algebra, Bd. II, Abschnitt II. — Im Folgenden soll stets, wenn die Charaktere einer *Abel*schen Gruppe in der Form $\psi_{A_\alpha}(A)$ geschrieben werden, vorausgesetzt sein, daß die Gleichungen (6.) erfüllt sind.

die Matrix (R) entspricht, so hat für jedes Element A von $\mathfrak{A}$ die Matrix (A) die Form $\psi^{(\alpha)}(A)\cdot(E)$, wo (E) die Einheitsmatrix bedeutet und die Zahlen $\psi^{(\alpha)}(A)$ einen der a Charaktere von $\mathfrak{A}$ repräsentieren. — Man sagt dann (vergl. *Frobenius*, D. II.), die Darstellung D entspreche dem Charakter $\psi^{(\alpha)}(A)$ von $\mathfrak{A}$. — Setzt man

$$\psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu}) = \gamma^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu}, \tag{7.}$$

so bestehen wegen (5.) die Gleichungen

$$(G_\lambda)(G_\mu) = \gamma^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu}(G_{\varphi(\lambda,\mu)}).$$

Die h Matrizen $(G_0), (G_1), \ldots, (G_{h-1})$ bilden also eine zu dem Zahlensystem $\gamma^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu}$ gehörende Darstellung der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen. Man erhält aber auch, indem man die sämtlichen dem Charakter $\psi^{(\alpha)}(A)$ von $\mathfrak{A}$ entsprechenden Darstellungen von $\mathfrak{G}$ betrachtet, die sämtlichen zu dem Zahlensystem (7.) gehörenden Darstellungen von $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen. Denn bilden die Matrizen $(H_0), (H_1), \ldots, (H_{h-1})$ eine solche Darstellung, und setzt man

$$(A_\beta G_\lambda) = \psi^{(\alpha)}(A_\beta).(H_\lambda), \quad (\beta = 0,1,\ldots,a-1,\ \lambda = 0,1,\ldots,h-1)$$

so bilden, wie man sich leicht überzeugt, die ah Matrizen $(A_\beta G_\lambda)$ eine dem Charakter $\psi^{(\alpha)}(A)$ entsprechende Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch ganze lineare Substitutionen.

Wir erhalten zugleich, da auf Grund der Sätze über die Gruppendeterminante*) jedem der a Charaktere von $\mathfrak{A}$ Darstellungen von $\mathfrak{G}$ entsprechen, in den a Zahlensystemen

$$\gamma^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu} \qquad (\alpha = 0,1,\ldots,a-1)$$

a Lösungen der Gleichungen $(A.)$.**) Unter diesen a Lösungen werden jedoch im allgemeinen mehrere einander assoziiert sein können, und es fragt sich nun, wie groß die Anzahl m' der verschiedenen Klassen K_λ ist, welche durch die hier betrachteten Lösungen repräsentiert werden; mit

*) *Frobenius*, Gruppencharaktere, § 7.

**) Einfacher ergibt sich dies folgendermaßen. Setzt man $A_{\lambda,\mu} = A_{H_\lambda, H_\mu}$, so folgen aus den Gleichungen (5.) auf Grund des assoziativen Gesetzes die Relationen

$$A_{P,Q} A_{PQ,R} = A_{P,QR} A_{Q,R}; \qquad (P,Q,R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$$

daher ist auch für jeden Charakter $\psi(A)$ von $\mathfrak{A}$

$$\psi(A_{P,Q})\psi(A_{PQ,R}) = \psi(A_{P,QR})\psi(A_{Q,R}).$$

anderen Worten: wie viele verschiedene Typen von Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}$ sich aus der Betrachtung der Gruppe $\mathfrak{G}$ ergeben.

Es seien

$$\psi_{B_0}(A),\ \psi_{B_1}(A), \ldots, \psi_{B_{b-1}}(A)$$

diejenigen Charaktere von $\mathfrak{A}$, denen auch lineare Charaktere*) $\chi(R)$ von $\mathfrak{G}$ entsprechen. Dann bilden die Elemente $B_0, B_1, \ldots, B_{b-1}$ eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$. Denn entsprechen den Charakteren $\psi_{B_\alpha}(A)$ und $\psi_{B_\beta}(A)$ von $\mathfrak{A}$ zwei lineare Charaktere $\chi^{(\alpha)}(R)$ und $\chi^{(\beta)}(R)$ von $\mathfrak{G}$, so entspricht dem Charakter $\psi_{B_\alpha B_\beta}(A)$ der lineare Charakter $\chi^{(\alpha)}(R)\,\chi^{(\beta)}(R)$. Sollen nun für zwei Elemente B und C von $\mathfrak{A}$ die beiden Zahlensysteme $\psi_B(A_{\lambda,\mu})$ und $\psi_C(A_{\lambda,\mu})$ zwei einander assoziierte Lösungen von $(A.)$ repräsentieren, so müssen sich h Konstanten $\varphi(H_0), \varphi(H_1), \ldots, \varphi(H_{h-1})$ bestimmen lassen, so daß

$$\psi_B(A_{\lambda,\mu}) = \frac{\varphi(H_\lambda)\,\varphi(H_\mu)}{\varphi(H_\lambda H_\mu)}\,\psi_C(A_{\lambda,\mu})$$

oder, was dasselbe ist,

$$\varphi(H_\lambda)\,\varphi(H_\mu) = \psi_{BC^{-1}}(A_{\lambda,\mu})\,\varphi(H_\lambda H_\mu)$$

wird. Setzt man aber dann

$$\chi(A_\alpha G_\lambda) = \psi_{BC^{-1}}(A_\alpha)\,\varphi(H_\lambda),$$

so ergibt sich für je zwei Elemente $R = A_\alpha G_\lambda$ und $S = A_\beta G_\mu$ von $\mathfrak{G}$ die Gleichung $\chi(R)\,\chi(S) = \chi(RS)$, ferner wegen

$$\varphi(H_0)\,\varphi(H_0) = \psi_{BC^{-1}}(A_{0,0})\,\varphi(H_0) = \varphi(H_0),$$

also $\varphi(H_0) = 1$, die Gleichung

$$\chi(A_\alpha) = \psi_{BC^{-1}}(A_\alpha)\,\varphi(H_0) = \psi_{BC^{-1}}(A_\alpha).$$

Daher bilden die ah Zahlen $\chi(A_\alpha G_\lambda)$ einen dem Charakter $\psi_{BC^{-1}}(A)$ entsprechenden linearen Charakter von $\mathfrak{G}$; folglich muß BC^{-1} ein Element von $\mathfrak{B}$ sein. Umgekehrt schließt man leicht, daß diese Bedingung für das Verlangte auch hinreichend ist.

Mithin ist die gesuchte Zahl m' gleich der Anzahl der mod. $\mathfrak{B}$ inkongruenten Elemente von $\mathfrak{A}$, also gleich $\frac{a}{b}$.

---

*) *Frobenius*, Primfaktoren, § 2.

Es sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}A_0 + \mathfrak{B}A_1 + \cdots + \mathfrak{B}A_{m'-1};$$

dann gehören also die m' Lösungen

$$\psi_{A_\alpha}(A_{\lambda,\mu}) = \gamma^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, m'-1)$$

der Gleichungen $(A.)$ m' verschiedenen Klassen $K_0, K_1, \ldots, K_{m'-1}$ an. Ist nun aber $\mathfrak{B}A_\alpha \cdot \mathfrak{B}A_\beta = \mathfrak{B}A_\gamma$, so ist offenbar die Lösung $\gamma^{(\gamma)}_{H_\lambda, H_\mu}$ der Lösung $\gamma^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu}\, \gamma^{(\beta)}_{H_\lambda, H_\mu}$ assoziiert, also $K_\gamma = K_\alpha K_\beta$. Daher bilden die Klassen $K_0, K_1, \ldots, K_{m'-1}$ eine der Gruppe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{M}'$ des Multiplikators $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$; demnach ist auch m' ein Divisor der Ordnung m von $\mathfrak{M}$.

Die Zahl m' hat noch eine andere Bedeutung für die Gruppe $\mathfrak{G}$.

Es sei $\mathfrak{R}$ der Kommutator*) der Gruppe $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{R}'$ der Kommutator der Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ der größte gemeinsame Teiler der Gruppen $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{A}$. Es seien r, r' und d die respektiven Ordnungen dieser Gruppen. Dann ist wegen des Isomorphismus der Gruppen $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{H}$ die Gruppe $\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{D}}$ der Gruppe $\mathfrak{R}$ isomorph, also $r' = dr$.

Allgemein besteht für den Kommutator $\mathfrak{R}$ einer Gruppe $\mathfrak{H}$ der Satz:

„Ist $\chi(S)$ ein linearer Charakter von $\mathfrak{H}$, so ist für jedes Element R von $\mathfrak{R}$ $\chi(R) = 1$; umgekehrt gehört jedes Element R von $\mathfrak{H}$, welches die Eigenschaft besitzt, daß für jeden linearen Charakter $\chi(S)$ von $\mathfrak{H}$ die Gleichung $\chi(R) = 1$ besteht, dem Kommutator von $\mathfrak{H}$ an.“**)

Diesen Satz wenden wir auf unseren Fall an.

Die Gruppe $\mathfrak{D}$ umfaßt alle Elemente J von $\mathfrak{A}$, die dadurch charakterisiert sind, daß für jeden linearen Charakter $\chi(R)$ von $\mathfrak{G}$ $\chi(J) = 1$ ist, und nur diese Elemente. Nun ist aber für jedes Element A von $\mathfrak{A}$ $\chi(A) = \psi_B(A)$, wo B ein Element von $\mathfrak{B}$ ist. Wir erhalten also alle Elemente von $\mathfrak{D}$, indem wir alle Elemente J von $\mathfrak{A}$ aufsuchen, für die

$$\psi_B(J) = 1 \tag{8.}$$

ist, wo B alle Elemente von $\mathfrak{B}$ durchläuft. Die Gesamtheit der Elemente J, welche den b Bedingungen (8.) genügen, bildet aber bekanntlich eine

---

*) Der Begriff des Kommutators einer Gruppe ist von *Dedekind* (Math. Ann. Bd. 48, S. 548) eingeführt worden. Vergl. auch *Frobenius*, Primfaktoren, § 2.

**) *Frobenius*, a. a. O.

der Gruppe $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ isomorphe Untergruppe von $\mathfrak{A}$, die Herr *Weber* a. a. O. als die zu $\mathfrak{B}$ *reziproke* Untergruppe von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Es ist daher auch $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{M}'$ isomorph, und es ist

$$m' = \frac{a}{b} = d = \frac{r'}{r}.$$

Wir erhalten den für das Folgende wichtigen Satz:

II. *In jeder durch eine Gruppe* $\mathfrak{A}$ *ergänzten Gruppe* $\mathfrak{G}$ *von* $\mathfrak{H}$ *ist der größte gemeinsame Teiler des Kommutators von* $\mathfrak{G}$ *und der Untergruppe* $\mathfrak{A}$ *von* $\mathfrak{G}$ *einer Untergruppe des Multiplikators von* $\mathfrak{H}$ *isomorph.*

Soll insbesondere $\mathfrak{G}$ eine hinreichend ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$ sein, so müssen unter den aus der Betrachtung der Darstellungen von $\mathfrak{G}$ durch ganze lineare Substitutionen sich ergebenden Darstellungen von $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen die sämtlichen m möglichen Typen vertreten sein. Es muß also für jede solche Gruppe $m' = d = m$, folglich auch insbesondere a durch m teilbar sein. Aus dem auf Seite 28 Gesagten folgt auch, daß umgekehrt $\mathfrak{G}$ stets dann eine hinreichend ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$ ist, wenn $d = m$ ist.

§ 3.

Es soll nun gezeigt werden, daß sich in der Tat für jede Gruppe $\mathfrak{H}$ hinreichend ergänzte Gruppen, und zwar auch solche von der Ordnung mh, angeben lassen.

Wir führen h erzeugende Elemente $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{h-1}$ ein und setzen fest, daß die h^2 Elemente

$$(9.) \qquad Q_\lambda\, Q_\mu\, Q^{-1}_{\varphi(\lambda,\mu)} = J_{H_\lambda, H_\mu}, \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1)$$

wo der Index $\varphi(\lambda, \mu)$ durch die Gleichung (4.) zu definieren ist, mit den h erzeugenden Elementen vertauschbar sein sollen; dann sind die Elemente J_{H_λ, H_μ} auch unter einander vertauschbar. Die h^3 Gleichungen

$$(10.) \qquad Q_\nu \cdot J_{H_\lambda, H_\mu} = J_{H_\lambda, H_\mu} \cdot Q_\nu \qquad (\lambda, \mu, \nu = 0, 1, \ldots, h-1)$$

definieren alsdann eine gewisse unendliche Gruppe $\mathfrak{K}'$; die Elemente J_{H_λ, H_μ} erzeugen eine gewisse unendliche *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{N}'$, die in $\mathfrak{K}'$ als invariante Untergruppe enthalten ist. Infolge des assoziativen Gesetzes ergeben sich aus (9.) und (10.) für die J_{H_λ, H_μ} die h^3 Relationen

$$(B.) \qquad J_{P,Q}\, J_{PQ,R} = J_{P,QR}\, J_{Q,R}. \qquad (P, Q, R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$$

Jedes Element von $\mathfrak{R}'$ läßt sich auf die Form JQ_λ bringen, wo J der Gruppe $\mathfrak{R}'$ angehört. Es kann sich nicht für $\lambda \neq \mu$ eine Gleichung der Form $JQ_\lambda = J'Q_\mu$ ergeben, da alsdann auch $H_\lambda = H_\mu$ folgen würde, weil doch auch die Elemente H_λ, für die Q_λ eingesetzt, den Bedingungen (9.) und (10.) genügen. Es resultiert aber auch für die Elemente J_{H_λ, H_μ} aus (9.) und (10.) keine Beziehung der Form

$$\prod_{\lambda,\mu} J_{H_\lambda, H_\mu}^{l_{\lambda,\mu}} = E,$$

die sich nicht schon aus den Gleichungen (*B.*) ergeben würde. Denn wäre dies der Fall, so könnte nicht jedes System von Zahlen r_{H_λ, H_μ}, die den Relationen

$$(A.) \qquad r_{P,Q}\, r_{PQ,R} = r_{P,QR}\, r_{Q,R} \qquad (P, Q, R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$$

genügen, die Gleichung

$$(11.) \qquad \prod_{\lambda,\mu} r_{H_\lambda, H_\mu}^{l_{\lambda,\mu}} = 1$$

erfüllen.*) Wir haben aber in § 1 gesehen, daß sich für jede beliebige Lösung $r_{P,Q}$ der Gleichungen (*A.*) h Matrizen $(H_0), (H_1), \ldots, (H_{h-1})$ angeben lassen, für welche die Bedingungen $(H_\lambda)(H_\mu) = r_{H_\lambda, H_\mu}(H_{\varphi(\lambda,\mu)})$ bestehen. Die Matrizen (H_λ) genügen jedoch, für die Q_λ eingesetzt, den Bedingungen (9.) und (10.). Daraus würde aber folgen, daß die Zahlen r_{H_λ, H_μ} die Gleichung (11.) befriedigen, was auf einen Widerspruch führt.

Die h^3 Gleichungen (*B.*) können daher als ein vollständiges System von definierenden Relationen**) für die durch die Elemente J_{H_λ, H_μ} erzeugte *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{R}'$ angesehen werden.

Bezeichnet man die $h^2 = p$ Elemente J_{H_λ, H_μ} in irgend einer Reihenfolge mit $X_1, X_2, \ldots, X_p$, so lassen sich die Gleichungen (*B.*) in der Form

$$(12.) \qquad X_1^{\alpha_{\lambda 1}} X_2^{\alpha_{\lambda 2}} \ldots X_p^{\alpha_{\lambda p}} \doteq E \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n,\ n = h^3)$$

schreiben, wo die Exponenten $\alpha_{\lambda\mu}$ gleich $1, -1$ oder 0 sind.

Es gilt nun bekanntlich folgender Satz:***)

„Genügen p unter einander vertauschbare Elemente $X_1, X_2, \ldots, X_p$ n Relationen der Form (12.), ist $p-s$ der Rang, sind $e_1, e_2, \ldots, e_\varrho$ diejenigen

---

*) Vergl. den am Schluß dieser Seite angeführten Satz.

**) Vergl. *Dyck*, Math. Ann., Bd. 20, S. 1.

***) Vergl. *Frobenius* und *Stickelberger*, dieses Journal, Bd. 86, S. 217.

Elementarteiler des Exponentensystems $(\alpha_{\lambda\mu})$, die größer sind als 1, so läßt sich die durch die Elemente $X_1, X_2, \ldots, X_p$ erzeugte *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{R}'$ darstellen als das direkte Produkt einer endlichen Gruppe $\mathfrak{R}$, deren Invarianten die Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_\varrho$ sind, und einer unendlichen Gruppe $\mathfrak{R}''$ des Ranges s, in der kein Element außer dem Hauptelement eine endliche Periode besitzt.*) Mit anderen Worten: es lassen sich in der Gruppe $\mathfrak{R}'$ $\varrho + s$ unabhängige Basiselemente

$$Y_\alpha = X_1^{s_{\alpha 1}} \ldots X_p^{s_{\alpha p}}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho)$$
$$Z_\beta = X_1^{t_{\beta 1}} \ldots X_p^{t_{\beta p}} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s)$$

angeben, wo Y_α zu dem Exponenten e_α gehört, während für Z_β keinerlei Bedingungen bestehen. — Es möge etwa

$$X_\nu = Y_1^{a_{\nu 1}} \ldots Y_\varrho^{a_{\nu\varrho}} \cdot Z_1^{b_{\nu 1}} \ldots Z_s^{b_{\nu s}}$$

sein. Sind dann $x_1, x_2, \ldots, x_p$ p Zahlen, die den Gleichungen

$$x_1^{a_{\lambda 1}} x_2^{a_{\lambda 2}} \ldots x_p^{a_{\lambda p}} = 1 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.}$$

genügen, und setzt man

$$y_\alpha = x_1^{s_{\alpha 1}} \ldots x_p^{s_{\alpha p}}, \quad z_\beta = x_1^{t_{\beta 1}} \ldots x_p^{t_{\beta p}}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, \varrho \\ \beta = 1, 2, \ldots, s \end{pmatrix}$$

so genügen die ϱ Größen y_α den Gleichungen $y_\alpha^{e_\alpha} = 1$ und es ist

$$x_\nu = y_1^{a_{\nu 1}} \ldots y_\varrho^{a_{\nu\varrho}} \cdot z_1^{b_{\nu 1}} \ldots z_s^{b_{\nu s}} . \tag{14.}$$

Umgekehrt erhält man die sämtlichen Lösungen der Gleichungen (13.), indem man in (14.) für $y_1, \ldots, y_\varrho$ beliebige Wurzeln der Gleichungen

$$y_1^{e_1} = 1, \ldots, y_\varrho^{e_\varrho} = 1$$

und für $z_1, \ldots, z_s$ beliebige (von Null verschiedene) Größen einsetzt.“

Unterwirft man nun die Elemente $X_1, \ldots, X_p$ der Gruppe $\mathfrak{R}'$, also auch die diese Gruppe erzeugenden Elemente $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{h-1}$, den s Bedingungen

$$Z_\beta = X_1^{t_{\beta 1}} \ldots X_p^{t_{\beta p}} = E, \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s) \tag{15.}$$

so definieren die Relationen (9.), (10.) und (15.) eine endliche Gruppe $\mathfrak{R}$,

---

*) Ist kein Elementarteiler von $(\alpha_{\lambda\mu})$ größer als 1, so hat man $\mathfrak{R} = E$ zu setzen. Die Gruppe $\mathfrak{R}$ ist eindeutig bestimmt; es ist dies die umfassendste in $\mathfrak{R}'$ enthaltene endliche Gruppe. Dagegen läßt sich, falls nicht $\mathfrak{R} = E$ oder $s = 0$ ist, die Gruppe $\mathfrak{R}''$ auf verschiedene Arten wählen.

in der die Elemente J_{H_λ, H_μ} die *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{N}$ der Ordnung $\overline{m} = e_1 e_2 \dots e_\varrho$ erzeugen. Die Gruppe $\mathfrak{K}$ ist dann als eine ergänzte Gruppe $(\mathfrak{N}, \mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ anzusehen.

Ich will zeigen, daß $s = h$, daß $\mathfrak{N}$ dem Multiplikator von $\mathfrak{H}$ isomorph und $\mathfrak{K}$ eine hinreichend ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$ ist.

Setzt man, wenn X_ν das Element $J_{P,Q}$ bedeutet, $x_\nu = r_{P,Q}$, so ist das Gleichungssystem (13.), abgesehen von der Schreibweise, mit dem Gleichungssystem $(A.)$ identisch. Es möge ferner

$$y_\alpha = x_1^{s\alpha 1} \dots x_p^{s\alpha p} = f_\alpha(r_{R,s}), \quad z_\beta = x_1^{t\beta 1} \dots x_p^{t\beta p} = g_\beta(r_{R,s})^*)$$

und

$$y_1^{\alpha\nu 1} \dots y_\varrho^{\alpha\nu\varrho} = F_{P,Q}(y_\alpha), \quad z_1^{b\nu 1} \dots z_s^{b\nu s} = G_{P,Q}(z_\beta)$$

gesetzt werden, sodaß

$$r_{P,Q} = F_{P,Q}(y_\alpha)\, G_{P,Q}(z_\beta) \tag{16.}$$

wird.

Wäre nun $s < h$, so müßten sich, wenn $c_{H_0}, c_{H_1}, \dots, c_{H_{h-1}}$ h beliebige Variable sind, die h^2 Funktionen $r_{P,Q} = \frac{c_P c_Q}{c_{PQ}}$ dieser Variabeln, die doch eine Lösung von $(A.)$ bilden, und also auch die h Ausdrücke

$$\prod_Q \left(\frac{c_P c_Q}{c_{PQ}}\right) = c_P^h$$

durch $s < h$ Variable $z_1, z_2, \dots, z_s$ ausdrücken lassen, was nicht möglich ist. Es kann aber auch nicht $s > h$ sein. Es mögen nämlich für eine beliebige Lösung $r_{P,Q}$ von $(A.)$ die h Größen $d_{H_0}, d_{H_1}, \dots, d_{H_{h-1}}$ dieselbe Bedeutung haben wie in § 1. Nimmt man dann zu den Gleichungen $(A.)$ noch die h Bedingungen

$$d_{H_0} = 1, d_{H_1} = 1, \dots, d_{H_{h-1}} = 1$$

hinzu, so werden die Zahlen $r_{P,Q}$, wie aus der Formel (2.) folgt, h-te Wurzeln der Einheit. Dies wäre aber nicht möglich, wenn die allgemeinste Lösung des Gleichungssystems $(A.)$ $s > h$ unbestimmte Größen $z_1, z_2, \dots, z_s$ enthielte. Es ist daher in der Tat $s = h$.

Ferner wird jeder der ϱ Ausdrücke $f_\alpha(r_{R,s})$, wenn für $r_{R,s}$ die Ausdrücke $\frac{c_R c_S}{c_{RS}}$ eingesetzt werden, identisch, d. h. für jede Wahl der Größen c_P, gleich 1. Denn andernfalls würde sich in der Gleichung

*) Entsprechend hat man zu setzen $Y_\alpha = f_\alpha(J_{R,s})$, $Z_\beta = g_\beta(J_{R,s})$.

$$\left\{f_\alpha\left(\frac{c_R c_S}{c_{RS}}\right)\right\}^{e_\alpha} = 1,$$

die, wie auch die Größen c_P gewählt sein mögen, erfüllt ist, eine Bedingung für diese Größen ergeben. Es ist daher stets

$$(17.)\quad \frac{c_P c_Q}{c_{PQ}} = F_{P,Q}\left\{f_\alpha\left(\frac{c_R c_S}{c_{RS}}\right)\right\} G_{P,Q}\left\{g_\beta\left(\frac{c_R c_S}{c_{RS}}\right)\right\} = G_{P,Q}\left\{g_\beta\left(\frac{c_R c_S}{c_{RS}}\right)\right\}.$$

Es lassen sich aber auch für jede beliebige Wahl der Größen $z_1, z_2, \ldots, z_h$ die Größen $a_{H_0}, a_{H_1}, \ldots, a_{H_{h-1}}$ so bestimmen, daß $z_\beta = g_\beta\left(\frac{a_R a_S}{a_{RS}}\right)$ wird. Um dies darzutun, genügt es zu zeigen, daß die h Funktionen $\overline{g}_\beta = g_\beta\left(\frac{c_R c_S}{c_{RS}}\right)$ der h Variabeln c_P von einander unabhängig sind. Dies ist aber in der Tat der Fall; denn würde eine Gleichung der Form $\varphi(\overline{g}_1, \overline{g}_2, \ldots, \overline{g}_h) = 0$ bestehen, so müßten, da, wie wir in § 1 gesehen haben, jede Lösung von (*A.*) sich auf die Form $s_{P,Q}\frac{c_P c_Q}{c_{PQ}}$ bringen läßt, wo die Zahlen $s_{P,Q}$ h-te Einheitswurzeln sind, die Größen

$$z_\beta^h = g_\beta(r_{R,S}^h) = g_\beta\left(\frac{c_R^h c_S^h}{c_{RS}^h}\right)$$

dieser Gleichung für jede Lösung $r_{P,Q}$ genügen. Dies ist aber nicht möglich, weil die Größen z_β unbestimmt bleiben sollen.

Daher sind zwei Lösungen

$$r_{P,Q} = F_{P,Q}(y_\alpha)\, G_{P,Q}(z_\beta)$$

und

$$r'_{P,Q} = F_{P,Q}(y'_\alpha)\, G_{P,Q}(z'_\beta)$$

dann und nur dann einander assoziiert, wenn $y'_\alpha = y_\alpha$ ist. Denn lassen sich die h Größen a_P so bestimmen, daß $r'_{P,Q} = \frac{a_P a_Q}{a_{PQ}} r_{P,Q}$ wird, so ergiebt sich

$$y'_\alpha y_\alpha^{-1} = f_\alpha(r'_{R,S})\, f_\alpha(r_{R,S}^{-1}) = f_\alpha(r'_{R,S}\, r_{R,S}^{-1}) = f_\alpha\left(\frac{a_R a_S}{a_{RS}}\right) = 1,$$

also $y'_\alpha = y_\alpha$. Sind aber diese Bedingungen erfüllt, so bestimme man die Größen a_P so, daß

$$z'_\alpha z_\beta^{-1} = g_\beta\left(\frac{a_R a_S}{a_{RS}}\right)$$

wird. Dann erhält man wegen (17.)

$$r'_{P,Q} = F_{P,Q}(y'_\alpha)\, G_{P,Q}(z_\beta)\, G_{P,Q}(z'_\beta z_\beta^{-1}) = \frac{a_P a_Q}{a_{PQ}} r_{P,Q}.$$

Es ist daher jede Lösung von $(A.)$ einer der $\overline{m} = e_1 e_2 \dots e_\varrho$ Lösungen

$$r_{P,Q} = F_{P,Q}(y_a) \tag{18.}$$

assoziiert, die man dadurch erhält, daß man für $y_1, \dots, y_\varrho$ beliebige Wurzeln der Gleichungen $y_1^{e_1} = 1, \dots, y_\varrho^{e_\varrho} = 1$ setzt. Unter diesen $\overline{m}$ Lösungen sind dagegen nicht zwei einander assoziiert.

Folglich ist $\overline{m} = m$ und die Gruppe $\mathfrak{K}$ von der Ordnung mh.

Für jeden der m Charaktere $\psi(J)$ der Gruppe $\mathfrak{N}$ stimmt das System der Zahlen $\psi(J_{P,Q})$ mit einem der m Zahlensysteme (18.) überein. Da nun dieselben m verschiedenen Klassen von Lösungen der Gleichungen $(A.)$ angehören, so ist für die ergänzte Gruppe $\mathfrak{K} = (\mathfrak{N}, \mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ die im vorigen Paragraphen betrachtete Zahl m' gleich m. Daher ist $\mathfrak{K}$, wie zu beweisen war, eine hinreichend ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$.

Zugleich sehen wir, daß $\mathfrak{N}$ dem Multiplikator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ isomorph ist, und erhalten eine Methode zur Bestimmung der Invarianten von $\mathfrak{M}$.

Da nun die Ordnung einer hinreichend ergänzten Gruppe von $\mathfrak{H}$ nach dem am Schluß des vorigen Paragraphen Gesagten nicht kleiner sein kann als mh, so erkennen wir auch, daß die hier konstruierte Gruppe $\mathfrak{K}$ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$ repräsentiert.

Die Definition der Gruppe $\mathfrak{K}$ vermöge der Gleichungen (9.), (10.) und (15.) hängt wesentlich von der Wahl der Elemente $Z_1, \dots, Z_h$ innerhalb der Gruppe $\mathfrak{N}'$ ab. Da man nun diese Elemente auf mehrere verschiedene Arten auswählen kann, so können im allgemeinen mehrere einander nicht isomorphe Darstellungsgruppen $\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$ existieren. Sie sind aber alle von der Ordnung mh, und in jeder von ihnen ist die Untergruppe $\mathfrak{A}$ dem Multiplikator von $\mathfrak{H}$ isomorph.

Es kann aber noch mehr bewiesen werden.

Ich bezeichne als einen linearen Charakter der unendlichen Gruppe $\mathfrak{K}'$ jedes System von nicht verschwindenden Größen $\chi(A)$, die sich den Elementen A von $\mathfrak{K}'$ in der Weise zuordnen lassen, daß für je zwei Elemente A und B von $\mathfrak{K}'$ die Gleichung

$$\chi(A)\chi(B) = \chi(AB) \tag{19.}$$

besteht. Ist dann $\mathfrak{T}$ der Kommutator von $\mathfrak{K}'$, d. h. diejenige Untergruppe von $\mathfrak{K}'$, die durch die Elemente der Form $ABA^{-1}B^{-1}$ erzeugt wird, so lassen sich die Elemente von $\mathfrak{T}$ in genau analoger Weise, wie es für endliche

Gruppen der Fall ist,*) folgendermaßen charakterisieren: ein Element T von $\mathfrak{K}'$ gehört dann und nur dann dem Kommutator $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{K}'$ an, wenn für jeden linearen Charakter $\chi(A)$ von $\mathfrak{K}'$ die Gleichung $\chi(T) = 1$ besteht.

Auf Grund dieses Kriteriums läßt sich der größte gemeinsame Teiler der Gruppen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{R}'$ leicht bestimmen.

Offenbar erhält man alle linearen Charaktere $\chi(A)$ von $\mathfrak{K}'$, indem man die h Zahlen $\chi(Q_0), \chi(Q_1), \ldots, \chi(Q_{h-1})$ beliebig wählt und die übrigen Größen $\chi(A)$ vermöge der Gleichungen (19.) bestimmt. Ist nun für einen beliebigen Charakter $\chi(Q_i) = c_{H_i}$, so wird $\chi(J_{P,Q}) = \frac{c_P c_Q}{c_{PQ}}$ und

$$\chi(Y_\alpha) = \chi\{f_\alpha(J_{R,S})\} = f_\alpha\{\chi(J_{R,S})\} = f_\alpha\left(\frac{c_R c_S}{c_{RS}}\right).$$

Dies ist aber, wie wir oben gesehen haben, gleich 1. Daher sind alle Elemente $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\varrho$ und also auch die durch diese Elemente erzeugte Gruppe $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{T}$ enthalten. Dagegen gehört kein Element von $\mathfrak{N}''$ (außer dem Hauptelement) der Gruppe $\mathfrak{T}$ an. Denn wäre

$$J = Z_1^{k_1} Z_2^{k_2} \ldots Z_h^{k_h}$$

ein Element von $\mathfrak{T}$, so müßte für jeden linearen Charakter $\chi(A)$ von $\mathfrak{K}'$

$$\chi(J) = [\chi(Z_1)]^{k_1} [\chi(Z_2)]^{k_2} \ldots [\chi(Z_h)]^{k_h} = 1$$

sein. Es ist aber, wenn wieder $\chi(J_{P,Q}) = \frac{c_P c_Q}{c_{PQ}}$ ist,

$$\chi(Z_\beta) = \chi\{g_\beta(J_{R,S})\} = g_\beta\{\chi(J_{R,S})\} = g_\beta\left(\frac{c_R c_S}{c_{RS}}\right).$$

Wir haben aber gesehen, daß die Zahlen c_P so gewählt werden können, daß die h Größen $g_\beta\left(\frac{c_R c_S}{c_{RS}}\right)$ beliebig vorgeschriebene Werte $z_1, z_2, \ldots, z_h$ annehmen. Es kann daher, wenn nicht alle Exponenten $k_1, k_2, \ldots, k_h$ gleich 0 sind, $\chi(J)$ nicht stets gleich 1 sein.

Mithin ist der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{R}'$ nichts anderes als die dem Multiplikator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{N}$ der Ordnung m. Der Kommutator $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{K}'$ ist daher eine endliche Gruppe, die offenbar als eine durch die Gruppe $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ ergänzte Gruppe des Kommutators $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{H}$

*) Vergl. den auf S. 30 angeführten Satz. — Es läßt sich leicht einsehen, daß dieser Satz für jede durch endlich viele Elemente erzeugbare Gruppe bestehen bleibt.

aufzufassen ist. Ihre Ordnung ist, falls r die Ordnung von $\mathfrak{R}$ bedeutet, gleich mr.

Es sei nun $\mathfrak{L}$ eine beliebige Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$, d. h. eine durch die Gruppe $\mathfrak{M}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$, deren Kommutator $\mathfrak{T}'$ die ganze Gruppe $\mathfrak{M}$ enthält. Es sei

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M}L_0 + \mathfrak{M}L_1 + \cdots + \mathfrak{M}L_{h-1},$$

wo der Komplex $\mathfrak{M}L_\lambda$ dem Elemente H_λ der mit $\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{M}}$ isomorphen Gruppe $\mathfrak{H}$ entsprechen möge. Dann ist

$$L_\lambda L_\mu L_{\varphi(\lambda,\mu)}^{-1} = M_{H_\lambda, H_\mu}$$

ein Element von $\mathfrak{M}$, also ein invariantes Element von $\mathfrak{L}$. Aus der Annahme, daß der Kommutator $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{L}$ alle Elemente von $\mathfrak{M}$ enthalten soll, ergibt sich unmittelbar, daß die Elemente $L_0, L_1, \ldots, L_{h-1}$ die ganze Gruppe $\mathfrak{L}$ erzeugen.*) Die Elemente $L_0, L_1, \ldots, L_{h-1}$ genügen aber, für die Q_λ eingesetzt, den die unendliche Gruppe $\mathfrak{K}'$ definierenden Bedingungen (9.) und (10.). Daraus folgt,**) daß die Gruppe $\mathfrak{K}'$ der Gruppe $\mathfrak{L}$ mehrstufig isomorph ist, und zwar derart, daß jedem Element von $\mathfrak{K}'$ nur ein Element von $\mathfrak{L}$ entspricht. Mithin ist auch der Kommutator $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{K}'$ dem Kommutator $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{L}$ in derselben Weise mehrstufig isomorph. Da aber die Ordnung von $\mathfrak{T}'$ gleich der Ordnung mr von $\mathfrak{T}$ ist, so ist der zwischen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ bestehende Isomorphismus ein einstufiger. Der Kommutator jeder beliebigen Darstellungsgruppe ist demnach der wohlbestimmten Gruppe $\mathfrak{T}$ isomorph.

Wir erhalten den Satz:

III. *Die Kommutatorgruppen je zweier Darstellungsgruppen einer gegebenen Gruppe sind einander isomorph.*

Ist insbesondere $\mathfrak{R} = \mathfrak{H}$, also $r = h$, so stimmt auch jede Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$ mit ihrer Kommutatorgruppe überein. Aus III. ergibt sich demnach:

IV. *Umfaßt der Kommutator einer Gruppe $\mathfrak{H}$ alle Elemente von $\mathfrak{H}$, so besitzt $\mathfrak{H}$ nur eine Darstellungsgruppe.****)

---

*) Dies folgt daraus, daß jedes Kommutatorelement von $\mathfrak{L}$ die Form $L_\lambda L_\mu L_\lambda^{-1} L_\mu^{-1}$ hat.

**) Vergl. *Dyck* a. a. O. und *Burnside*, Theory of Groups of finite Order, § 182.

***) Die genauere Bestimmung der Anzahl der einander nicht isomorphen Darstellungsgruppen einer Gruppe $\mathfrak{H}$, deren Kommutator nicht alle Elemente von $\mathfrak{H}$ umfaßt, werde ich in einer späteren Arbeit durchführen.

§ 4.

In den bisherigen Betrachtungen ist das Hauptgewicht auf die Untersuchung der sämtlichen Zahlensysteme $r_{P,Q}$ gelegt worden, zu denen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen gehören können. Die andere Frage: „wie lassen sich die verschiedenen zu demselben Zahlensystem $r_{P,Q}$ gehörenden primitiven Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}$ bestimmen?“ läßt sich ohne Einführung neuer Hilfsmittel auf Grund der Sätze des Herrn *Frobenius* beantworten.

Es sei wieder wie in § 2

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\,G_0 + \mathfrak{A}\,G_1 + \cdots + \mathfrak{A}\,G_{h-1} \qquad (G_0 = E)$$

eine beliebige durch die *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{H}$; es mögen A_α, $A_{\lambda,\mu}$, $\psi^{(\alpha)}(A)$ und $r^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu} = \psi^{(\alpha)}(A_{\lambda,\mu})$ dieselbe Bedeutung haben wie dort. Dann ist, wie wir gesehen haben, die Untersuchung der sämtlichen zu dem Zahlensystem $r^{(\alpha)}_{H_\lambda, H_\mu}$ gehörenden primitiven Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{H}$ durch gebrochene lineare Substitutionen identisch mit der Bestimmung der verschiedenen dem Charakter $\psi^{(\alpha)}(A)$ von $\mathfrak{A}$ entsprechenden primitiven Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch ganze lineare Substitutionen oder, was dasselbe ist, mit der Bestimmung der diesen Darstellungen entsprechenden zur Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörenden Matrizen.*)

Für diese gelten nun folgende Sätze:**)

„Bedeuten die ah Größen $x_{A_\beta G_\lambda}$ ($\beta = 0, 1, \ldots, a-1$; $\lambda = 0, 1, \ldots, h-1$) unabhängige Variable, so werden die sämtlichen dem Charakter $\psi^{(\alpha)}(A)$ entsprechenden, zur Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörigen primitiven Matrizen dadurch erhalten, daß man die zur Gruppe gehörige Matrix h-ten Grades

$$Y^{(\alpha)} = \Big(\sum_\beta \psi^{(\alpha)}(A_\beta)\, x_{A_\beta G_\lambda G_\mu^{-1}}\Big) \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, h-1)$$

in primitive Teilmatrizen zerlegt. Sind $\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{\Phi}_2, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_{l_\alpha}$ die l_α verschiedenen Primfaktoren der Determinante $Q^{(\alpha)}$ von $Y^{(\alpha)}$, ist f_λ der Grad des Primfaktors $\boldsymbol{\Phi}_\lambda$, so ist

$$Q^{(\alpha)} = \boldsymbol{\Phi}_1^{f_1} \boldsymbol{\Phi}_2^{f_2} \ldots \boldsymbol{\Phi}_{l_\alpha}^{f_{l_\alpha}}, \tag{20.}$$

also

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_{l_\alpha}^2 = h. \tag{21.}$$

---

*) *Frobenius*, D. I.

**) *Frobenius*, Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen, §§ 2 und 3. Sitzungsberichte 1898, S. 501.

Sind ferner $\chi^{(1)}(S), \chi^{(2)}(S), \ldots, \chi^{(l_a)}(S)$ die den l_a Primfaktoren Φ_λ entsprechenden Charaktere von $\mathfrak{G}$, so ist, wenn $S = A_\beta G_\lambda$ ist,

$$(22.) \qquad f_1\chi^{(1)}(S)+f_2\chi^{(2)}(S)+\cdots+f_{l_a}\chi^{(l_a)}(S) = h\,\psi^{(a)}(A_\beta)\,\varepsilon_\lambda,$$

wo ε_λ gleich 1 oder gleich 0 ist, je nachdem $\lambda = 0$ oder > 0 ist."

Setzt man nun, wenn R irgend ein Element von $\mathfrak{G}$ bedeutet,

$$(23.) \qquad y_R^{(a)} = \sum_\beta \psi^{(a)}(A_\beta)\, x_{A_\beta R},$$

so läßt sich $Y^{(a)}$ in der Form

$$Y^{(a)} = (y^{(a)}_{G_\lambda G_\mu^{-1}})$$

schreiben. Ferner wird, wie leicht ersichtlich ist, für jedes Element A von $\mathfrak{A}$

$$(24.) \qquad y^{(a)}_{AR} = \psi^{(a)}(A^{-1})\, y^{(a)}_R.$$

Bezeichnet man das Element H_μ^{-1} von $\mathfrak{H}$ mit $H_{\mu'}$, so erhält man

$$G_\mu G_{\mu'} = A_{\mu,\mu'} G_0 = A_{\mu,\mu'},$$

also $G_\mu^{-1} = A^{-1}_{\mu,\mu'} G_{\mu'}$. Daher ist, wenn $H_\lambda H_\mu^{-1} = H_\varrho$ gesetzt wird,

$$G_\lambda G_\mu^{-1} = A^{-1}_{\mu,\mu'} A_{\lambda,\mu'} G_\varrho.$$

Bezeichnet man nun den Ausdruck $y^{(a)}_{G_\lambda}$ mit z_{H_λ}, so wird wegen (24.)

$$y^{(a)}_{G_\lambda G_\mu^{-1}} = \psi^{(a)}(A_{\mu,\mu'})\,\psi^{(a)}(A^{-1}_{\lambda,\mu'})\, z_{H_\lambda H_\mu^{-1}} = \frac{r^{(a)}_{H_\mu, H_\mu^{-1}}}{r^{(a)}_{H_\lambda, H_\mu^{-1}}}\, z_{H_\lambda H_\mu^{-1}}.$$

Da nun das Zahlensystem $r^{(a)}_{H_\lambda, H_\mu}$ dem Gleichungssystem $(A.)$ genügt und, wegen $G_0 = E$, $r^{(a)}_{H_\lambda, E} = 1$ ist, so ist

$$r^{(a)}_{H_\lambda H_\mu^{-1}, H_\mu}\, r^{(a)}_{H_\lambda, H_\mu^{-1}} = r^{(a)}_{H_\lambda H_\mu^{-1}, E}\, r^{(a)}_{H_\mu, H_\mu^{-1}} = r^{(a)}_{H_\mu, H_\mu^{-1}}.$$

Daher läßt sich die Matrix $Y^{(a)}$ in der Form

$$(25.) \qquad Y^{(a)} = (r^{(a)}_{PQ^{-1}, Q}\, z_{PQ^{-1}}) \qquad (P, Q = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$$

schreiben. Wir sehen also, daß $Y^{(a)}$ sich auch als die in § 1 dem Zahlensystem $r^{(a)}_{P,Q}$ zugeordnete Matrix h-ten Grades ansehen läßt.

Nimmt man an, $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}$ sei eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$, so ist jedes System von Zahlen $r_{P,Q}$, die den Gleichungen $(A.)$ genügen, einem der $a = m$ Zahlensysteme $r^{(a)}_{P,Q}$ assoziiert. Aus dem zitierten Satze läßt sich daher schließen:

V. *Ist* $r_{P,Q}$ *eine beliebige Lösung der Gleichungen* (A.), *sind*

$$x_{H_0}, x_{H_1}, \ldots, x_{H_{h-1}}$$

unabhängige Variable, und setzt man

$$(r_{PQ^{-1},Q}\, x_{PQ^{-1}}) = \Sigma(R)\, x_R, \qquad (R = H_0, H_1, \ldots, H_{h-1})$$

so ist jede zu dem Zahlensystem $r_{P,Q}$ *gehörende primitive Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{H}$ *einer der primitiven Darstellungen äquivalent, in welche die durch die Matrizen* (R) *gebildete Darstellung zerlegt werden kann.*

Ich will nun zeigen, wie sich die Anzahl l_a der Primfaktoren von $Q^{(\alpha)}$ oder, was dasselbe ist, die Anzahl der verschiedenen dem Charakter $\psi^{(\alpha)}(A)$ von $\mathfrak{A}$ entsprechenden primitiven Darstellungen von $\mathfrak{G}$ genauer bestimmen läßt. Die Methode, die hier zur Bestimmung von l_a angewandt wird, ist der von Herrn *Frobenius**) zur Bestimmung der Anzahl der verschiedenen Primfaktoren der Gruppendeterminante benutzten Methode genau nachgebildet.

Für jeden der l_a dem Charakter $\psi^{(\alpha)}(A)$ entsprechenden Charaktere $\chi^{(\varrho)}(S)$ von $\mathfrak{G}$ ist

$$\chi^{(\varrho)}(A_\beta\, G_\lambda) = \psi^{(\alpha)}(A_\beta)\, \chi^{(\varrho)}(G_\lambda).$$

Da nun

$$\begin{aligned} ah &= \sum_S \chi^{(\varrho)}(S^{-1})\, \chi^{(\varrho)}(S) = \sum_{\beta,\lambda} \chi^{(\varrho)}(A_\beta^{-1}\, G_\lambda^{-1})\, \chi^{(\varrho)}(A_\beta\, G_\lambda) \\ &= \sum_{\beta,\lambda} \psi^{(\alpha)}(A_\beta^{-1}\, A_\beta)\, \chi^{(\varrho)}(G_\lambda^{-1})\, \chi^{(\varrho)}(G_\lambda) = a \sum_\lambda \chi^{(\varrho)}(G_\lambda^{-1})\, \chi^{(\varrho)}(G_\lambda) \end{aligned}$$

ist,**) so erhält man

(26.) $$\sum_\lambda \chi^{(\varrho)}(G_\lambda^{-1})\, \chi^{(\varrho)}(G_\lambda) = h.$$

Ferner ergibt sich aus der für jeden Charakter f-ten Grades bestehenden Formel***)

$$\sum_S \chi(G_\lambda^{-1}\, S^{-1}\, G_\lambda\, S) = \frac{ah}{f}\, \chi(G_\lambda^{-1})\, \chi(G_\lambda)$$

die Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{h-1} \chi^{(\varrho)}(G_\lambda^{-1}\, G_\mu^{-1}\, G_\lambda\, G_\mu) = \frac{h}{f_\varrho}\, \chi^{(\varrho)}(G_\lambda^{-1})\, \chi^{(\varrho)}(G_\lambda).$$

---

*) Primfaktoren, § 7.

**) *Frobenius*, Gruppencharaktere, § 5, Formel (10.).

***) ebenda, Formel (5.).

Es ist daher wegen (26.)

$$\sum_{\lambda,\mu} \frac{f_\varrho}{h} \chi^{(\varrho)}(G_\lambda^{-1} G_\mu^{-1} G_\lambda G_\mu) = h$$

und

$$\sum_{\varrho=1}^{l_\alpha} \sum_{\lambda,\mu} \frac{f_\varrho}{h} \chi^{(\varrho)}(G_\lambda^{-1} G_\mu^{-1} G_\lambda G_\mu) = h l_\alpha$$

oder auch

$$h l_\alpha = \sum_{\lambda,\mu} \sum_{\varrho=1}^{l_\alpha} \frac{f_\varrho}{h} \chi^{(\varrho)}(G_\lambda^{-1} G_\mu^{-1} G_\lambda G_\mu).$$

Es sei nun

$$G_\lambda^{-1} G_\mu^{-1} G_\lambda G_\mu = F_{\lambda,\mu} G_\nu,$$

wo $F_{\lambda,\mu}$ ein Element von $\mathfrak{A}$ bedeutet. Dann ist nach (22.)

$$\sum_{\varrho=1}^{l_\alpha} \frac{f_\varrho}{h} \chi^{(\varrho)}(G_\lambda^{-1} G_\mu^{-1} G_\lambda G_\mu) = \psi^{(\alpha)}(F_{\lambda,\mu})\, \varepsilon_\nu.$$

Wir erhalten daher

$$h l_\alpha = \sum_{\lambda=0}^{h-1} \sum_{\mu} \psi^{(\alpha)}(F_{\lambda,\mu}), \tag{27.}$$

wo μ diejenigen der Zahlen $0, 1, \ldots, h-1$ durchläuft, für die $G_\lambda^{-1} G_\mu^{-1} G_\lambda G_\mu$ ein Element von $\mathfrak{A}$ ist, oder was dasselbe ist, für die H_μ mit H_λ vertauschbar ist. Aus (27.) läßt sich l_α folgendermaßen bestimmen.

Es mögen die h Elemente $H_0, H_1, \ldots, H_{h-1}$ von $\mathfrak{H}$ in k Klassen konjugierter Elemente zerfallen, die mit $(0), (1), \ldots, (k-1)$ bezeichnet werden mögen; es möge die Klasse (ϱ) genau h_ϱ Elemente enthalten, das Zeichen (0) die Hauptklasse (das Element E) bedeuten. Zwei Elemente G_λ und G_μ können offenbar nur dann in $\mathfrak{G}$ konjugiert sein, wenn es H_λ und H_μ in $\mathfrak{H}$ sind. Es läßt sich aber auch, was an einer späteren Stelle die Betrachtung vereinfacht und hier gleich festgesetzt werden soll, das vollständige Restsystem $G_0, G_1, \ldots, G_{h-1}$ von $\mathfrak{G}$ mod. $\mathfrak{A}$ so wählen, daß G_λ und G_μ stets dann in $\mathfrak{G}$ konjugiert sind, wenn H_λ und H_μ einer Klasse (ϱ) angehören. Sind nämlich $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots$ die mit H_1 konjugierten Elemente von $\mathfrak{H}$, so enthält jeder der Komplexe $\mathfrak{A} G_{\alpha_1}, \mathfrak{A} G_{\alpha_2}, \ldots$ mindestens ein mit G_1 konjugiertes Element; man bezeichne dann diese Elemente mit $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots$. Ebenso verfahre man, wenn etwa H_2 ein mit H_1 nicht konjugiertes Element ist, in bezug auf G_2, u. s. w. Gehören dann etwa $H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}$ den k verschiedenen Klassen

$$(0), (1), \ldots, (k-1)$$

an, so sind in $\mathfrak{G}$ unter den Elementen $G_0, G_1, \ldots, G_{h-1}$ genau $h_0 = 1$ konjugiert G_0, genau h_1 konjugiert G_1, u. s. w.

Sind nun $H_{\mu_1}, H_{\mu_2}, \ldots$ die mit dem Elemente H_λ der Klasse (ϱ) vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$, so ist

$$G_\lambda G_{\mu_\sigma} = F_{\lambda,\mu_\sigma} G_{\mu_\sigma} G_\lambda. \qquad \left(\sigma = 1, 2, \ldots, \frac{h}{h_\varrho}\right)$$

Es seien unter den $\frac{h}{h_\varrho}$ Elementen F_{λ,μ_σ} genau a_λ unter einander verschieden. Dann bilden diese a_λ Elemente offenbar eine Untergruppe $\mathfrak{A}_\lambda$ von $\mathfrak{A}$; und man sieht auch leicht ein, daß a_λ ein Divisor von $\frac{h}{h_\varrho}$ sein muß. Ferner zeigt man leicht, daß die Gruppe $\mathfrak{A}_\lambda$ sich nicht ändert, wenn G_λ durch ein konjugiertes Element G_{λ_1} ersetzt wird. Man erhält auf diese Weise k Untergruppen

$$\mathfrak{A}_0 (= E), \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{k-1}$$

von $\mathfrak{A}$, die beziehungsweise den k Klassen $(0), (1), \ldots, (k-1)$ von $\mathfrak{H}$ zugeordnet sind.*) Ferner bilden diejenigen Elemente B von $\mathfrak{A}$, für die $\psi^{(\alpha)}(B) = 1$ ist, eine Untergruppe $\mathfrak{B}_\alpha$ von $\mathfrak{A}$. Es sei $\mathfrak{D}_{\alpha\varrho}$ der größte gemeinsame Teiler der Gruppen $\mathfrak{A}_\varrho$ und $\mathfrak{B}_\alpha$, $d_{\alpha\varrho}$ die Ordnung von $\mathfrak{D}_{\alpha\varrho}$. Dann erhalten wir in (27.), wenn H_λ der Klasse (ϱ) angehört,

$$\sum_\mu \psi^{(\alpha)}(F_{\lambda,\mu}) = \frac{h}{a_\varrho h_\varrho} \sum_J \psi^{(\alpha)}(J) = \frac{h d_{\alpha\varrho}}{h_\varrho a_\varrho} \sum_{J'} \psi^{(\alpha)}(J'),$$

wo J alle Elemente von $\mathfrak{A}_\varrho$, J' ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{A}_\varrho$ mod. $\mathfrak{D}_{\alpha\varrho}$ durchläuft. Nun bilden aber die $\frac{a_\varrho}{d_{\alpha\varrho}}$ Zahlen $\psi^{(\alpha)}(J')$ einen Charakter der Gruppe $\frac{\mathfrak{A}_\varrho}{\mathfrak{D}_{\alpha\varrho}}$, und da $\psi^{(\alpha)}(J')$ nur dann gleich 1 sein soll, wenn J' der Gruppe $\mathfrak{D}_{\alpha\varrho}$ angehört, so erhalten wir nach einem bekannten Satze

$$\sum \psi^{(\alpha)}(J') = 0,$$

außer wenn $d_{\alpha\varrho} = a_\varrho$, d. h. $\mathfrak{A}_\varrho$ in $\mathfrak{B}_\alpha$ enthalten ist. Es kann daher gesetzt werden

---

*) Ist etwa $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\varrho + \mathfrak{A}_\varrho B_2 + \cdots + \mathfrak{A}_\varrho B_{\frac{a}{a_\varrho}}$, so entsprechen der Klasse (ϱ) von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ $\frac{a}{a_\varrho}$ verschiedene Klassen von je $a_\varrho h_\varrho$ konjugierten Elementen, die durch die Elemente $G_\varrho, B_2 G_\varrho, \ldots, B_{\frac{a}{a_\varrho}} G_\varrho$ repräsentiert werden.

$$(28.) \qquad \sum_{\mu} \psi^{(\alpha)}(F_{\lambda,\mu}) = \frac{h}{h_\varrho}\left[\frac{d_{\alpha\varrho}}{a_\varrho}\right],$$

wo $[x]$, wie gewöhnlich, die größte ganze Zahl bedeutet, die $\leqq x$ ist. Da die rechte Seite der Gleichung (28.) nur von der Klasse (ϱ) abhängt, der das Element H_λ angehört, so erhalten wir aus (27.)

$$l_\alpha = \sum_{\varrho=0}^{k-1} \left[\frac{d_{\alpha\varrho}}{a_\varrho}\right],$$

d. h. l_α ist gleich der Anzahl der Klassen (ϱ) von $\mathfrak{H}$, für die $\mathfrak{A}_\varrho$ in $\mathfrak{B}_\alpha$ enthalten ist.

Diesem Ergebnis läßt sich auch folgende Fassung geben:

VI. *Ist $r_{P,Q}$ irgend eine Lösung der Gleichungen (A.), so besitzen gewisse l ($l \geqq 1$)*) unter den k Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft, daß, sobald das Element P einer dieser l Klassen angehört und Q ein beliebiges mit P vertauschbares Element ist, $r_{P,Q} = r_{Q,P}$ ist. Diese Zahl l gibt zugleich die Anzahl der verschiedenen (einander nicht äquivalenten)**) zu dem Zahlensystem $r_{P,Q}$ gehörenden primitiven Darstellungen von $\mathfrak{H}$ an.*

Die Grade der Charaktere einer Gruppe sind, wie Herr *Frobenius* (Primfaktoren, § 12) bewiesen hat, Divisoren der Ordnung der Gruppe. In genau analoger Weise läßt sich beweisen:

VII. *Enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung ah eine aus invarianten Elementen von $\mathfrak{G}$ bestehende Untergruppe der Ordnung a, so geht der Grad eines jeden Charakters nicht nur in ah, sondern auch in h auf.*

Hieraus folgt unmittelbar:

VIIa. *Der Grad einer jeden primitiven Darstellung einer Gruppe $\mathfrak{H}$ durch (ganze oder gebrochene) lineare Substitutionen ist ein Divisor der Ordnung von $\mathfrak{H}$.*

Ich beweise den Satz VII folgendermaßen:

Setzt man für die ah Variabeln x_S, wo S alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft, fest, daß für je zwei Elemente S und T $x_{ST} = x_{TS}$ sein soll, so wird für je zwei konjugierte Elemente S und S' der Gruppe $x_S = x_{S'}$. Dagegen sollen, wenn k' die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ und $S, S', S'', \ldots k'$ Elemente von $\mathfrak{G}$ sind, von denen nicht zwei einander konju-

*) Die Hauptklasse (0) besitzt stets diese Eigenschaft.

**) Dagegen können, wenn der Kommutator von $\mathfrak{H}$ nicht gleich $\mathfrak{H}$ ist, unter diesen l primitiven Darstellungen auch mehrere einander assoziiert sein.

giert sind, die Größen x_S, $x_{S'}$, $x_{S''}$, ... als unabhängige Variable angesehen werden. Es wird dann für zwei beliebige Elemente S und T auch

$$y_{ST}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} \psi^{(\alpha)}(A_\beta)\, x_{A_\beta ST} = \sum_{\beta} \psi^{(\alpha)}(A_\beta)\, x_{A_\beta TS} = y_{TS}^{(\alpha)}.$$

Daher wird, wenn H_λ und H_μ zwei konjugierte Elemente von $\mathfrak{H}$, also nach unserer Festsetzung G_λ und G_μ konjugierte Elemente von $\mathfrak{G}$ sind, $y_{G_\lambda}^{(\alpha)} = y_{G_\mu}^{(\alpha)}$ oder $z_{H_\lambda} = z_{H_\mu}$. Man bezeichne, wenn $H_\lambda, H_{\lambda_1}, \ldots$ die h_ϱ Elemente der Klasse (ϱ) von $\mathfrak{H}$ sind, die einander gleichen Größen $z_{H_\lambda}, z_{H_{\lambda_1}}, \ldots$ alle mit z_ϱ. Ist nun (ϱ) eine Klasse, für die $\mathfrak{A}_\varrho$ nicht in $\mathfrak{B}_\alpha$ enthalten ist, so lassen sich Elemente A von $\mathfrak{A}_\varrho$ angeben, für die $\psi^{(\alpha)}(A) \neq 1$ ist; es ist dann, weil G_λ und AG_λ konjugierte Elemente von $\mathfrak{G}$ sind, nach (24.)

$$z_\varrho = y_{G_\lambda}^{(\alpha)} = y_{AG_\lambda}^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}(A^{-1})\, y_{G_\lambda}^{(\alpha)} = 0.$$

Ist dagegen (ϱ) eine der l_α Klassen $(\varrho_0) = (0), (\varrho_1), \ldots$, für die $\mathfrak{A}_\varrho$ in $\mathfrak{B}_\alpha$ enthalten ist, so ist

$$z_\varrho = y_{G_\lambda}^{(\alpha)} = a_\varrho \sum_{B} \psi^{(\alpha)}(B)\, x_{BG_\lambda}, \qquad (\varrho = \varrho_0, \varrho_1, \ldots)$$

wo B ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{A}$ mod. $\mathfrak{A}_\varrho$ durchläuft, von Null verschieden, weil unter den $\frac{a}{a_\varrho}$ Elementen BG_λ nicht zwei konjugiert, die Variabeln x_{BG_λ} also alle von einander verschieden sind. Zugleich sehen wir, daß die l_α Größen $z_{\varrho_0}, z_{\varrho_1}, \ldots$, die nicht Null sind, als unabhängige Variable angesehen werden können; denn in der Tat enthalten diese Größen, als Funktionen der x_S betrachtet, keine dieser Variabeln gemeinsam.

Nun sind aber die Primfaktoren von $Q^{(\alpha)}$ auch Primfaktoren der Gruppendeterminante von $\mathfrak{G}$. Daher wird (*Frobenius*, Primfaktoren, § 6), wenn

$$\xi_\lambda = \frac{1}{f_\lambda} \sum_{S} \chi^{(\lambda)}(S)\, x_S$$

gesetzt wird, unter den über die Variabeln x_S gemachten Voraussetzungen

$$\Phi_\lambda = \xi_\lambda^{f_\lambda}.$$

Es ist aber, wenn $\chi^{(\lambda)}(G_\mu)$ mit $\chi_\varrho^{(\lambda)}$ bezeichnet wird, sobald H_μ der Klasse (ϱ) von $\mathfrak{H}$ angehört,

$$\xi_\lambda = \frac{1}{f_\lambda} \sum_{\beta,\mu} \psi^{(\alpha)}(A_\beta)\, \chi^{(\lambda)}(G_\mu)\, x_{A_\beta G_\mu}$$

$$= \frac{1}{f_\lambda} \sum_{\mu} \chi^{(\lambda)}(G_\mu)\, y_{G_\mu}^{(\alpha)} = \frac{1}{f_\lambda} \sum_{\varrho=0}^{k-1} h_\varrho\, \chi_\varrho^{(\lambda)}\, z_\varrho.$$

Aus der Gleichung

$$Q^{(a)} = \prod_{\lambda=0}^{l_a} \xi_\lambda^{f_\lambda^2}$$

folgt dann, da (vergl. Formel (25.)) $Q^{(a)}$ eine ganze rationale Funktion der l_a Variabeln $z_{\varrho_0}, z_{\varrho_1}, \ldots$ ist, deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen sind, da ferner $\frac{h_0 \chi_0^{(\lambda)}}{f_\lambda} = 1$ ist, nach einem bekannten Satze, daß die l_a Größen

$$\frac{h_\varrho \chi_\varrho^{(\lambda)}}{f_\lambda} \qquad (\varrho = \varrho_0, \varrho_1, \ldots)$$

ganze algebraische Zahlen sind. Dies ist dann, weil für die übrigen $k - l_a$ Klassen offenbar $\chi_\varrho^{(\lambda)} = 0$ ist, auch für alle $\varrho = 0, 1, \ldots, k-1$ der Fall. Daraus ergibt sich aber, wenn $\chi_{\varrho'}^{(\lambda)}$ den zu $\chi_\varrho^{(\lambda)}$ konjugiert komplexen Wert bedeutet, aus (26.), daß auch

$$\frac{h}{f_\lambda} = \sum_\varrho \frac{h_\varrho \chi_\varrho^{(\lambda)}}{f_\lambda} \chi_{\varrho'}^{(\lambda)}$$

eine ganze algebraische, und also auch ganze rationale Zahl ist. Das ist aber der zu beweisende Satz.*)

§ 5.

Die Bestimmung des Multiplikators und einer Darstellungsgruppe einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{H}$ nach den in §§ 1 und 3 angegebenen Methoden führt auf sehr umständliche Rechnungen. Im Folgenden sollen einige Sätze abgeleitet werden, die in vielen Fällen diese Rechnungen zu umgehen ermöglichen.

---

*) Der Satz VII läßt sich, wie Herr *Frobenius* die Güte hatte mir mitzuteilen, einfacher folgendermaßen beweisen.

Es seien $(0), (1), \ldots$ die k' Klassen konjugierter Elemente, in die die $ah = g$ Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ zerfallen, es enthalte die α-te Klasse g_α Elemente, und es bedeute (α') die zu (α) inverse Klasse. Sei $e_{\alpha\beta} = 0$, wenn $\beta \neq \alpha'$ ist, und $e_{\alpha\alpha'} = 1$; ferner sei (*Frobenius*, Gruppencharaktere, § 4) $\frac{g p_{\alpha\beta}}{g_\alpha}$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $SR = RSAB$, wo A ein bestimmtes Element der α-ten Klasse ist, wo B die g_β Elemente der β-ten Klasse durchläuft, und R und S unabhängig von einander die g Elemente von $\mathfrak{G}$ durchlaufen. Es ist dann (ebenda, § 3, (12)), wenn f der Grad eines Charakters von $\mathfrak{G}$ ist, $\left| f^2 p_{\alpha\beta'} - g g_\alpha e_{\alpha\beta'} \right| = 0$, also auch $\left| \frac{g}{g_\alpha} p_{\alpha\beta'} - \frac{g^2}{f^2} e_{\alpha\beta'} \right| = 0$. Folglich sind die k' Wurzeln $\left(\frac{g}{f}\right)^2$ dieser Gleichung ganze Zahlen.

Jede Darstellungsgruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

1. $\mathfrak{K}$ enthält eine aus invarianten Elementen von $\mathfrak{K}$ bestehende Untergruppe $\mathfrak{M}$, und es ist $\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}}$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ isomorph;

2. der Kommutator von $\mathfrak{K}$ enthält alle Elemente von $\mathfrak{M}$;

3. es gibt keine Gruppe $\mathfrak{G}$, welche die Eigenschaften 1. und 2. besitzt, und deren Ordnung größer ist als die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{K}$.

Die folgenden Sätze dienen dazu, eine obere Grenze für die Ordnung m des Multiplikators von $\mathfrak{H}$ abzuleiten. Dieses ist oft hinreichend für die Bestimmung einer Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$; denn wissen wir etwa, daß m nicht größer ist als eine gewisse ganze Zahl $\overline{m}$, und kennen wir eine Gruppe $\mathfrak{K}$ der Ordnung $\overline{m}h$, welche die Eigenschaften 1. und 2. besitzt, so schließen wir auf Grund des Satzes II, daß $\overline{m} = m$, und daß $\mathfrak{K}$ eine Darstellungsgruppe von $\mathfrak{H}$ ist.

Ich stelle zunächst folgende Betrachtung an.

Die Bedingung 2. besagt, daß für jeden linearen Charakter $\chi(R)$ von $\mathfrak{K}$ $\chi(J) = 1$ sein muß, sobald J ein Element von $\mathfrak{M}$ ist.

Es sei $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}Q_0 + \mathfrak{M}Q_1 + \cdots + \mathfrak{M}Q_{h-1}$, wo $\mathfrak{M}Q_\lambda$ dem Element H_λ der mit $\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}}$ isomorphen Gruppe $\mathfrak{H}$ entsprechen möge, es seien $M_0, M_1, \ldots, M_{m-1}$ die Elemente,

$$\psi^{(\mu)}(J) = \psi_{M_\mu}(J) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1)$$

die m Charaktere der *Abel*schen Gruppe $\mathfrak{M}$.

Betrachtet man irgend eine primitive Darstellung f-ten Grades von $\mathfrak{K}$ durch ganze lineare Substitutionen, die dem Charakter $\psi(J) = \psi_M(J)$ von $\mathfrak{M}$ entspricht, so ist, wenn (J) die dem Element J von $\mathfrak{M}$ entsprechende

---

Bedeutet $q_{\alpha\beta}$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung $QP = PQAB$, wenn man P und Q unabhängig von einander die h Elemente $G_0, G_1, \ldots, G_{h-1}$ durchlaufen läßt, so ist $\frac{g p_{\alpha\beta}}{g_a} = a^2 q_{\alpha\beta}$. Denn man erhält aus jeder Lösung P, Q a^2 verschiedene Lösungen von $SR = RSAB$, indem man für R die a Elemente $PA_0, PA_1, \ldots, PA_{a-1}$, für S unabhängig hiervon die a Elemente $QA_0, QA_1, \ldots, QA_{a-1}$ setzt. Mithin ist

$$\left| q_{\alpha\beta'} - \frac{g^2}{a^2 f^2} e_{\alpha\beta'} \right| = 0,$$

also sind die k' Wurzeln $\left(\frac{g}{af}\right)^2 = \left(\frac{h}{f}\right)^2$ dieser Gleichung ganze Zahlen.

Matrix ist, $(J) = \psi_M(J).(E)$. Nun bilden aber die Determinanten der die Gruppe darstellenden Matrizen einen linearen Charakter von $\mathfrak{K}$. Folglich muß für jedes J

$$\{\psi(J)\}^f = \psi_{M^f}(J) = 1,$$

und also auch $M^f = E$ sein. *Daher ist f durch die Ordnung des Elementes M teilbar.* Entsprechen nun etwa dem Charakter $\psi(J)$ von $\mathfrak{M}$ im Ganzen l Charaktere der Grade $f_1, f_2, \ldots, f_l$, so ist nach Formel (21.)

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_l^2 = h.$$

Mithin muß h durch das Quadrat der Ordnung des Elementes M teilbar sein. Da dies für jedes Element M von $\mathfrak{M}$ gilt, so folgt hieraus:

VIII. *Das Quadrat der größten Invariante (also auch jeder Invariante) des Multiplikators von $\mathfrak{H}$ ist ein Divisor der Ordnung h von $\mathfrak{H}$.*

Ist also eine Primzahl p nur in der ersten Potenz in h enthalten, so ist m durch p nicht teilbar. *Speziell sind alle Gruppen von quadratfreier Ordnung abgeschlossene Gruppen.*

Dieser Satz ist in einem viel allgemeineren Satze enthalten.

Bilden die Elemente $H_0, H_1, \ldots, H_{s-1}$ eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{H}$, so bilden die in den s Komplexen $\mathfrak{M}Q_0, \mathfrak{M}Q_1, \ldots, \mathfrak{M}Q_{s-1}$ enthaltenen Elemente von $\mathfrak{K}$ eine Untergruppe $\mathfrak{S}'$ der Ordnung ms von $\mathfrak{K}$, die als eine durch die Gruppe $\mathfrak{M}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{S}$ anzusehen ist. Es sei $\mathfrak{K}'$ der Kommutator von $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$ der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}'$. Es möge ferner

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{S}'A_0 + \mathfrak{S}'A_1 + \cdots + \mathfrak{S}'A_{n-1}$$

sein, sodaß sich jedes Element P von $\mathfrak{K}$ in eindeutiger Weise auf die Form $S'_\alpha A_\nu$ bringen läßt, wo S'_α ein Element von $\mathfrak{S}'$ bedeutet Setzt man dann $S'_\alpha = S'_P$ und bezeichnet den Komplex

$$\mathfrak{K}' \prod_{\nu=0}^{n-1} S'_{A_\nu P}$$

mit $\mathfrak{K}'_P$, so besteht, wie ich in meiner Arbeit „Neuer Beweis eines Satzes über endliche Gruppen“*) gezeigt habe, für je zwei Elemente P und Q von $\mathfrak{K}$ die Beziehung $\mathfrak{K}'_P \mathfrak{K}'_Q = \mathfrak{K}'_{PQ}$; ferner ist für jedes Element P von $\mathfrak{K}$, das

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1902, S. 1013.

dem Kommutator von $\mathfrak{K}$ angehört, $\mathfrak{R}'_P = \mathfrak{R}'$. Ist nun $P = J$ ein Element von $\mathfrak{S}'$, das in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, so ist für jedes ν $A_\nu J = JA_\nu$, also $S'_{A_\nu J} = J$; daraus folgt aber, daß $\mathfrak{R}'_J = \mathfrak{R}' J^n$ ist. Es ist aber zugleich J ein Element des Kommutators von $\mathfrak{K}$, also $\mathfrak{R}'_J = \mathfrak{R}'$. Wir erhalten also für jedes Element J die Gleichung

$$J^n \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}',$$

welche besagt, daß die n-te Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}'$, und also auch in $\mathfrak{D}$ enthalten ist.

Ist insbesondere die Ordnung j des Elementes J zu n teilerfremd, so ist, weil $J^j = E$ und J^n Elemente von $\mathfrak{D}$ sind, J selbst in $\mathfrak{D}$ enthalten. Berücksichtigen wir noch, daß $\mathfrak{D}$ nach Satz II einer Untergruppe des Multiplikators von $\mathfrak{S}$ isomorph ist, so erhalten wir den Satz:

IX. *Enthält $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ von der Ordnung s und dem Index n, und bedeutet $\mathfrak{M}^{(n)}$ diejenige Untergruppe des Multiplikators $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$, die alle Elemente von $\mathfrak{M}$ umfaßt, deren Ordnungen zu n teilerfremd sind, so ist $\mathfrak{M}^{(n)}$ einer Untergruppe des Multiplikators von $\mathfrak{S}$ isomorph.*

Ist speziell s' ein Divisor von h, der zu n teilerfremd ist, so bilden die Elemente von $\mathfrak{M}$, deren Ordnungen in s' aufgehen, eine in $\mathfrak{M}^{(n)}$ enthaltene Untergruppe von $\mathfrak{M}$. Aus IX ergibt sich daher insbesondere:

X. *Ist p^a die höchste Potenz der Primzahl p, die in h aufgeht, und ist $\mathfrak{S}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$, deren Ordnung durch p^a teilbar ist, so ist die Ordnung m des Multiplikators von $\mathfrak{H}$ durch keine höhere Potenz von p teilbar, als dies für die Ordnung m' des Multiplikators von $\mathfrak{S}$ der Fall ist.*

Man wird daher, um zu untersuchen, durch welche Potenz von p die Zahl m teilbar ist, zunächst die Multiplikatoren derjenigen Untergruppen von $\mathfrak{H}$, deren Ordnungen durch p^a teilbar sind, zu bestimmen suchen. Ist speziell für eine dieser Gruppen m' zu p teilerfremd, so ist es auch für m der Fall.

Ich will noch bemerken, daß, wenn s und n teilerfremd sind, die oben betrachtete Gruppe $\mathfrak{D}$ mit der Gruppe $\mathfrak{M}^{(n)}$ übereinstimmen muß. Denn da $\mathfrak{D}$ einer Untergruppe des Multiplikators von $\mathfrak{S}$ isomorph ist, so geht nach Satz VIII die Ordnung eines jeden Elementes von $\mathfrak{D}$ in s auf. Daher ist $\mathfrak{D}$ wegen der von uns gemachten Annahme in $\mathfrak{M}^{(n)}$ enthalten. Zugleich ist aber auch $\mathfrak{M}^{(n)}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{D}$; folglich ist in der Tat $\mathfrak{D} = \mathfrak{M}^{(n)}$.

Aus X ergibt sich fast unmittelbar:

XI. *Besitzt eine Gruppe* $\mathfrak{H}$ *die Eigenschaft, daß jede ihrer Untergruppen von Primzahlpotenzordnung eine zyklische Gruppe ist, so ist* $\mathfrak{H}$ *eine abgeschlossene Gruppe.*

Um dies zu beweisen, genügt es auf Grund des Satzes X zu zeigen, daß jede zyklische Gruppe $\mathfrak{C}$ eine abgeschlossene Gruppe ist. Dies ist aber leicht einzusehen. Denn ist $\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ eine beliebige durch eine *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{A}$ ergänzte Gruppe von $\mathfrak{C}$, so ist, weil $\mathfrak{A}$ aus invarianten Elementen von $\mathfrak{G}$ besteht und $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}$ eine zyklische Gruppe ist, $\mathfrak{G}$ eine *Abel*sche Gruppe; ihr Kommutator also gleich E. Daraus folgt aber, daß der Multiplikator von $\mathfrak{C}$ in der Tat gleich E ist.

Neue Grundlagen der Arithmetik.

Von *K. Hensel.*

In der Arithmetik sind die positiven ganzen Zahlen und nur sie durch die Natur gegeben; die Null, die negativen, die gebrochenen, die irrationalen und die imaginären Zahlen sind Symbole, welche man hinzugenommen hat, um in dem erweiterten Gebiete alle Rechnungsoperationen ausführen zu können. In welcher Weise man diese neu eingeführten Symbole bezeichnet, ist gleichgiltig. Ich möchte in den folgenden Betrachtungen eine von der gewöhnlichen verschiedene Darstellung dieser Zahlen einführen und zugleich die aus ihr folgenden neuen Prinzipien der Arithmetik zur Begründung einer neuen Theorie der algebraischen Zahlen benutzen. Ich bemerke dabei aber, daß man auf diesem Wege auch Mittel für die arithmetische Untersuchung der transzendenten Zahlen erhält, insbesondere allgemeine Kriterien dafür, ob eine Zahl algebraisch oder transzendent ist; denn die vorliegenden Untersuchungen ergeben zum ersten Male eine notwendige Bedingung dafür, daß eine vorgelegte Zahl algebraisch und nicht transzendent ist, und zwar stimmt dieselbe wörtlich mit dem *Cauchy-Puiseux*schen Kriterium für die algebraischen Funktionen einer Variablen überein.

§ 1.

Es sei p eine beliebige Primzahl; dann kann jede ganze positive Zahl A auf eine einzige Art nach steigenden Potenzen von p so entwickelt werden, daß die Koeffizienten Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p-1$ sind. Ist

$$A = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots + a_\varrho p^\varrho \tag{1.}$$

diese Entwicklung, also a_α der erste von Null verschiedene Koeffizient, so sagen wir, *A besitzt in bezug auf p die Ordnungszahl* α. Eine Zahl

(1ª.) $$E = e_0 + e_1 p + \cdots + e_\varrho p^\varrho,$$

deren Anfangskoeffizient $e_0 > 0$ ist, soll *eine Einheit modulo p* genannt werden. Dann folgt aus (1.) die Gleichung

(2.) $$A = p^a E.$$

Jede Zahl ist also auf eine einzige Weise als Produkt einer Einheit und einer Potenz von p darstellbar, deren Exponent gleich der Ordnungszahl von A ist.

Zur leichteren Repräsentation einer solchen Reihe:

(3.) $$B = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_\varrho p^\varrho$$

benutzen wir nach Analogie der Dezimalbrüche die Darstellung

(3ª.) $$B = b_0, b_1 b_2 \ldots b_\varrho,$$

wobei allgemein der mit p^k multiplizierte Koeffizient b_k an die k-te Stelle hinter dem Komma gesetzt ist.

Bei der Untersuchung einer Zahl A in bezug auf ihr Verhalten für die Primzahl p spielt ihre absolute Größe eine ganz nebensächliche Rolle; dagegen ist es von besonderer Wichtigkeit, welche Potenz von p sie als Faktor enthält, und welches ihre Anfangsglieder in der Darstellung (1.) sind. Bei der Darstellung (3ª.) sind also die ersten Ziffern $b_0, b_1, b_2, \ldots$ für diese Untersuchungen viel wichtiger als die letzten $b_\varrho, b_{\varrho-1}, \ldots$.

Fügt man z. B. zu der Zahl $13 = 3 + 2 \cdot 5$ das Glied $4 \cdot 5^{10}$ hinzu, so kann die so sich ergebende sehr große Zahl $13 + 4 \cdot 5^{10}$ in allen Kongruenzen für eine Potenz 5^h als Modul, deren Exponent $h \leqq 10$ ist, unbedenklich für 13 gesetzt werden und umgekehrt. Für alle derartigen Untersuchungen sind also die beiden Zahlen

3,2 und 3,2000000004

äquivalent, genau ebenso, wie die beiden gleich bezeichneten dekadischen Dezimalbrüche äquivalent sein würden, wenn keine höhere Genauigkeit als die einer Einheit der neunten Dezimalstelle gefordert wird, oder wenn Zahlen von der Größenordnung $\left(\frac{1}{10}\right)^{10}$ vernachlässigt werden.

Wir wollen dieser Eigenschaft der Zahlen in bezug auf die Primzahl p in der Weise Rechnung tragen, daß wir für den Bereich von p die sämtlichen ganzen Zahlen in anderer Weise anordnen.

Von zwei Zahlen

$$B = b_0, b_1 b_2 \ldots \quad \text{und} \quad C = c_0, c_1 c_2 \ldots$$

soll B für den Bereich von p größer als C heißen, wenn von den Differenzen

$$b_0 - c_0,\ b_1 - c_1, \ldots$$

die erste nicht verschwindende positiv ausfällt.

Um diese Ordnung deutlicher hervortreten zu lassen, ordnen wir jeder Zahl

$$B = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_\varrho p^\varrho$$
$$= b_0, b_1 b_2 \ldots b_\varrho$$

eine Maßzahl

$$\overline{B} = b_0 + \frac{b_1}{g} + \frac{b_2}{g^2} + \cdots + \frac{b_\varrho}{g^\varrho}$$

zu, in welcher g eine willkürlich aber ein für alle Male fest gewählte ganze Zahl bedeutet, welche größer als p ist. Für die unterhalb 10 liegenden Primzahlen $p = 2, 3, 5, 7$ können und wollen wir g einfach gleich 10 annehmen. Dann ist für solche Bereiche die zu einer Zahl $B = b_0, b_1 b_2 \ldots b_\varrho$ zugehörige Maßzahl $\overline{B}$ einfach der mit denselben Ziffern geschriebene gewöhnliche Dezimalbruch.

Zu jeder Zahl B gehört dann offenbar eine und nur eine Maßzahl $\overline{B}$, und die soeben gegebene Anordnung jener Zahlen fällt zusammen mit der folgenden:

Von zwei Zahlen B und C ist diejenige für den Bereich von p die größere, welche die größere Maßzahl besitzt.

Wir wollen diese Beziehung durch die Ungleichung ausdrücken

$$B > C \qquad (p);$$

in Worten: B ist größer als C für den Bereich von p.

Läßt man in B die auf eine Ziffer b_k folgenden fort, so erhält man eine Zahl

$$B_k = b_0, b_1 b_2 \ldots b_k,$$

welche zwar von B verschieden, aber für alle Potenzen von p als Modul, deren Exponent kleiner oder gleich $k+1$ ist, kongruent ist zu B. Ich will diese Zahlen B_k daher *die Näherungswerte von B für den Bereich von p*

nennen, weil man sie bei allen Untersuchungen für B setzen kann, bei denen Vielfache von p^{k+1} vernachlässigt werden dürfen. Auf Grund der neu definierten Größenanordnung unterscheiden sich dann die Näherungswerte $B_0, B_1, B_2, \ldots$ der Reihe nach um immer kleiner werdende Zahlen von B. Ist $B = b_0, b_1 \ldots b_\varrho$, so sind alle Näherungswerte $B_{\varrho+1}, B_{\varrho+2}, \ldots$ einander gleich, nämlich gleich B.

Sieht man von der Beschränkung ab, daß die Koeffizienten b_i modulo p reduziert sein sollen, so kann man eine und dieselbe Zahl B auf sehr verschiedene Arten in der Form

$$B = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 p + \cdots + \bar{b}_\sigma p^\sigma$$

darstellen; wir wollen auch solche *„nicht reduzierte“* Darstellungen zulassen, sie aber von der eindeutig bestimmten *„reduzierten“* Darstellung genau unterscheiden.

Schreibt man die nicht reduzierte Zahl $B = \Sigma \bar{b}_i p^i$ in der Form

$$\begin{aligned} B &= (\bar{b}_0 - p\varepsilon_1) + (\varepsilon_1 + \bar{b}_1 - p\varepsilon_2)\, p + (\varepsilon_2 + \bar{b}_2 - p\varepsilon_3)\, p^2 + \cdots \\ &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots, \end{aligned}$$

so kann man die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ auf eine einzige Weise so bestimmen, daß die neuen Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sämtlich reduziert sind. Man erhält nämlich die linearen Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{b}_0 &= b_0 + p\varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 + \bar{b}_1 &= b_1 + p\varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 + \bar{b}_2 &= b_2 + p\varepsilon_3 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung bestimmt sich b_0 als der kleinste Rest von $\bar{b}_0$ modulo p und somit auch ε_1 offenbar eindeutig, aus der zweiten ebenso b_1 und ε_2 usw.; diese Gleichungen ergeben also stets eine eindeutig bestimmte Lösung, so groß auch ihre Anzahl sei. Schreibt man B in der abgekürzten Form

$$B = \bar{b}_0, \bar{b}_1 \bar{b}_2 \ldots,$$

so hat man von links nach rechts gehend jede Ziffer durch ihren kleinsten Rest modulo p zu ersetzen und die nächste Ziffer um ε_i zu vermehren, wenn bei der vorigen $\varepsilon_i p$ fortgelassen wurde.

Die Addition und die Multiplikation zweier Zahlen

$$B = b_0, b_1 b_2 \ldots \quad \text{und} \quad C = c_0, c_1 c_2 \ldots$$

erfolgt genau so wie die Addition und Multiplikation von Dezimalbrüchen, nur beginnen die Operationen nicht bei den letzten, sondern bei den ersten Ziffern b_0 und c_0; und falls eine der so sich ergebenden Ziffern größer als $p-1$ ist, so wird nicht die nach links, sondern die nach rechts benachbarte Ziffer um die entsprechende Anzahl von Einheiten vermehrt. Offenbar ergeben sich nämlich für die Summe und für das Produkt der beiden Zahlen B und C die folgenden Darstellungen in der nicht reduzierten Form:

$$B+C = (b_0+c_0)+(b_1+c_1)\,p+(b_2+c_2)\,p^2+\cdots$$
$$BC = b_0\,c_0+(b_0\,c_1+b_1\,c_0)\,p+(b_0\,c_2+b_1\,c_1+b_2\,c_0)\,p^2+\cdots$$

und diese sind dann nach der soeben gegebenen Vorschrift in ihre reduzierte Form überzuführen. Das Verfahren übersieht man am einfachsten an den beiden folgenden Beispielen, bei denen die Primzahl p gleich 5 angenommen ist:

$$\begin{array}{r} 2{,}3042134 \\ +\,3{,}2413123 \\ \hline 0{,}10113031 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4{,}324 \\ 3{,}403 \\ \hline 2{,}1332 \\ 10133 \\ 21332 \\ \hline 2{,}2312242 \end{array} \qquad (5)$$

Sind

$$B = p^\beta E,\ C = p^\gamma E'$$

zwei beliebige Zahlen, so folgt aus der Gleichung

$$BC = p^{\beta+\gamma} E E',$$

wenn man beachtet, daß das Produkt zweier Einheiten modulo p offenbar wieder eine Einheit ist, der Satz:

Die Ordnungszahl eines Produktes ist gleich der Summe der Ordnungszahlen seiner Faktoren.

Die Summe oder das Produkt beliebig vieler Zahlgrößen ergibt wieder eine Zahlgröße derselben Art.

Anders ist es bei der Differenz und bei dem Quotienten zweier Zahlgrößen. Unter gewissen Bedingungen findet sich das Resultat einer solchen Operation nicht in dem bis jetzt definierten Bereiche, und wir sind daher gezwungen, denselben in geeigneter Weise zu erweitern.

Unter der Differenz $A-B$ verstehe ich eine reduzierte Zahlgröße

$$C = c_0, c_1 c_2 \ldots,$$

welche der Bedingung

$$B+C = A$$

oder der Bedingung

$$(4.)\quad (b_0+c_0)+p\,(b_1+c_1)+p^2\,(b_2+c_2)+\cdots = a_0+a_1 p+a_2 p^2+\cdots$$

genügt. Analog verstehe ich unter dem Quotienten $\frac{A}{B}$ eine Zahlgröße D, für welche $BD = A$ ist.

Schreibt man die Gleichung (4.) in der Form

$$\begin{aligned} C &= c_0+c_1 p+c_2 p^2+\cdots = (a_0-b_0)+(a_1-b_1)\,p+(a_2-b_2)\,p^2+\cdots \\ &= (a_0-b_0+p\varepsilon_1)+(a_1-\varepsilon_1-b_1+p\varepsilon_2)\,p+(a_2-\varepsilon_2-b_2+p\varepsilon_3)\,p^2+\cdots, \end{aligned}$$

so ergeben sich für die reduzierten Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ die folgenden Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} c_0 = a_0 \quad\quad -b_0+p\varepsilon_1 \\ c_1 = a_1-\varepsilon_1-b_1+p\varepsilon_2 \\ c_2 = a_2-\varepsilon_2-b_2+p\varepsilon_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

durch welche dieselben sukzessive eindeutig bestimmt werden; denn aus der ersten ergeben sich c_0 und ε_1, aus der zweiten c_1 und ε_2, usw.

Die so sich ergebende Vorschrift für die Subtraktion einer Zahl $B = b_0, b_1 \ldots b_\varrho$ von einer andern $A = a_0, a_1 \ldots a_\varrho$ stimmt also vollständig mit derjenigen für die Subtraktion von Dezimalbrüchen überein. Nur muß man wieder die Operation mit den ersten Ziffern a_0 und b_0 beginnen und jedesmal, wenn der Subtrahendus b_i größer ist, als der Minuendus a_i, von der nach rechts benachbarten Ziffer a_{i+1} eine Einheit derselben borgen. So erhält man für die Grundzahl 5 folgendes Beispiel:

$$\begin{array}{r} 3{,}121341 \\ -\,4{,}434320 \\ \hline 4{,}131411 \end{array} \qquad (5)$$

Diese Operation ist immer ausführbar und ergibt stets ein eindeutig bestimmtes Resultat, wenn die ganze Zahl A im gewöhnlichen Sinne des Wortes größer ist, als die ganze Zahl B oder ihr gleich ist. Wenn dagegen B kleiner ist als A, so muß das Gebiet der positiven ganzen Zahlen in jedem Falle erweitert werden, damit sich das Resultat der Operation $A-B$ in dem Zahlengebiete findet. Gewöhnlich geschieht das so, daß man jeder Zahl A ein *Symbol* $A' = -A$ zuordnet, welches durch die Gleichung

$$A+A' = 0$$

definiert wird. Diese Erweiterung würde nun bei der Untersuchung der Zahlen in ihrem Verhältnis zu der Primzahl p eine nicht naturgemäße Anordnung aller Zahlensymbole herbeiführen und die Einsicht in die hier geltenden Gesetze wesentlich erschweren.

Ich will daher mit Hilfe der folgenden Betrachtungen das Gebiet der positiven ganzen Zahlen in anderer Weise erweitern und dann nachweisen, daß in diesem größeren Gebiete zunächst die vier elementaren Rechenoperationen ohne jede Beschränkung ausgeführt werden können und stets zu eindeutig bestimmten Resultaten führen.

Sind

$$A = a_0, a_1 a_2 \dots a_\varrho, \quad B = b_0, b_1 b_2 \dots b_\varrho$$

ganz beliebig gegeben, so liefert uns die Auflösung der linearen Gleichungen (5.) in jedem Falle eine eindeutig bestimmte, beliebig weit fortsetzbare Reihe modulo p reduzierter ganzer Zahlen

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \dots,$$

welche aber, falls A kleiner als B ist, nicht abbricht. Betrachtet man die aus den $\sigma+1$ ersten Zahlen dieser Reihe gebildete positive ganze Zahl

$$C_\sigma = c_0, c_1 c_2 \dots c_\sigma = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots + c_\sigma p^\sigma,$$

so befriedigt sie zwar nicht die Gleichung $A-B = C_\sigma$, wohl aber genügt sie der Kongruenz

$$A-B \equiv C_\sigma \pmod{p^{\sigma+1}},$$

da die $\sigma+1$ Zahlen $c_0, c_1, \dots, c_\sigma$ den Gleichungen (5.) genügen. Die Zahl C_σ würde also nach der auf S. 51 gegebenen Definition ein Näherungswert

einer durch die Gleichung

$$A-B=C$$

definierten Zahlgröße sein, und diese Beziehung besteht für jeden noch so großen Wert von σ, wenn man die Reihe der Koeffizienten c genügend weit verlängert.

Untersucht man die Zahlen nicht in bezug auf ihr Verhalten modulo p, sondern wie gewöhnlich in bezug auf ihre Größe, so wird man gezwungen, sogenannte *irrationale* Zahlen einzuführen; so definiert man z. B. die Zahl π durch den ins unendliche fortgesetzten Dezimalbruch

$$\pi = 3{,}14159265\ldots,$$

weil man ein Mittel kennt, seine Ziffern beliebig weit so zu berechnen, daß er der für π geltenden Definitionsgleichung mit jeder vorgegebenen Genauigkeit genügt.

In derselben Weise wollen wir den Bereich der positiven ganzen Zahlen erweitern, indem wir jede begrenzte oder unbegrenzte Reihe mit modulo p reduzierten ganzen Koeffizienten

$$C = c_0+c_1 p+c_2 p^2+\cdots = c_0, c_1 c_2 \ldots$$

als *eine Zahlgröße für den Bereich von* p definieren, wenn eine Vorschrift existiert, ihre Koeffizienten so weit zu berechnen, als man nur immer will.

Ich zeige zunächst, daß in diesem erweiterten Bereiche, aber auch nur in diesem, nicht nur die Subtraktion, sondern auch die Division einer gewöhnlichen ganzen Zahl durch eine andere ein wohl definiertes Resultat ergibt. Es seien

$$A = a_0, a_1 a_2 \ldots a_\varrho, \quad B = b_0, b_1 b_2 \ldots b_\varrho$$

zwei ganze Zahlen, und es sei vorläufig b_0 nicht gleich Null. Ist dann zunächst A ein Vielfaches von B, so ist $C = \frac{A}{B}$ diejenige ganze Zahl, für welche $A = BC$ ist. Die unbekannten Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ ergeben sich aus der Gleichung

$$a_0+a_1 p+a_2 p^2+\cdots = b_0 c_0+(b_0 c_1+b_1 c_0) p+(b_0 c_2+b_1 c_1+b_2 c_0) p^2+\cdots .$$

Schreibt man die linke Seite in der Form

$$(a_0+p\varepsilon_1)+(a_1-\varepsilon_1+p\varepsilon_2) p+(a_2-\varepsilon_2+p\varepsilon_3) p^2+\cdots,$$

so ergeben sich zur Bestimmung der ganzen Zahlen $c_0, c_1, c_2, \ldots \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ die Gleichungen:

$$c_0 = \frac{a_0 + p\varepsilon_1}{b_0},$$

$$c_1 = \frac{a_1 - \varepsilon_1 + p\varepsilon_2 - b_1 c_0}{b_0},$$

$$c_2 = \frac{a_2 - \varepsilon_2 + p\varepsilon_3 - (b_1 c_1 + b_2 c_0)}{b_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und hier ist, was stets möglich ist, ε_1 so zu bestimmen, daß c_0 eine reduzierte ganze Zahl wird; hierauf ε_2 so, daß c_1 reduziert ist u. s. w. Ist $\frac{A}{B}$ ganz, so bricht die Reihe ab. Ist $\frac{A}{B}$ nicht ganz, so erhält man auf diese Weise eine wohldefinierte Reihe $C = c_0, c_1 c_2 \ldots$, deren Näherungswerte C_k mit jeder Annäherung die Kongruenz

$$A \equiv BC_k \pmod{p^{k+1}}$$

befriedigen, falls der Exponent k groß genug gewählt wird, und die daher als der Quotient $\frac{A}{B}$ für den Bereich von p definiert werden soll.

Auch die Division einer Zahl A durch eine andere B kann, wie man sich leicht überzeugt, genau ebenso wie die zweier Dezimalbrüche ausgeführt werden; man bestimme nämlich die erste Ziffer c_0 so, daß A und $c_0 B$ in der ersten Ziffer übereinstimmen, sodaß also

$$A - c_0 B = 0, a_1' a_2' \ldots$$

ist. Dann bestimme man $c_1, c_2, \ldots$ so, daß

$$A - (c_0 + c_1 p) B = 0, 0\, a_2'' \ldots,$$
$$A - (c_0 + c_1 p + c_2 p^2) B = 0, 00\, a_3''' \ldots$$

ist. Dann wird in der Tat für

$$C_k = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots + c_k p^k$$
$$A - C_k B \equiv 0 \pmod{p^{k+1}},$$

d. h. die so sich ergebende Zahlgröße $C = \Sigma c_k p^k$ ist der gesuchte Quotient $\frac{A}{B}$ für den Bereich von p.

So ergibt sich z. B. für die Grundzahl $p = 5$:

$$
\begin{array}{l}
3{,}12 : 4{,}21 = 2{,}\overline{4220}\ \overline{42204}\ldots \\
3{,}03 \\
\hline
\quad 1444\ldots \\
\quad 1111 \\
\hline
\quad 33344\ldots \\
\quad 303 \\
\hline
\quad\ 3044\ldots \\
\quad\ 303 \\
\hline
\quad\quad 14444\ldots \\
\quad\quad 1111 \\
\hline
\quad\quad 33344\ldots
\end{array}
\qquad (5)
$$

Man erkennt, daß diese Division eine periodische Reihe ergibt.

Mit diesen neuen Zahlgrößen, von denen die rationalen Zahlen einen Teilbereich bilden, will ich mich im folgenden genauer beschäftigen und zunächst die Vorschriften für die elementaren Rechnungsoperationen mit ihnen geben.

§ 2.

Es sei

$$A = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots = a_0, a_1 a_2 \ldots$$

eine beliebige Zahl des im vorigen Abschnitte definierten Bereiches, deren Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ also eine unendliche Reihe wohldefinierter reduzierter ganzer Zahlen bilden. Dann soll für jedes $k = 0, 1, 2 \ldots$ die ganze Zahl

$$A_k = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^k = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k$$

der k-te Näherungswert von A genannt werden. Diese Näherungswerte

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

oder die ganzen Zahlen

$$a_0\ ,\quad a_0, a_1\ ,\quad a_0, a_1 a_2\ , \ldots$$

bilden dann eine eindeutig bestimmte Reihe von wohldefinierten ganzen Zahlen, für welche allgemein

$$A_k = A_{k-1} + a_k p^k,$$

also

$$A_k \equiv A_{k-1} \pmod{p^k}$$

ist. Jede dieser ganzen Zahlen ist also ein Näherungswert für alle auf sie folgenden Zahlen dieser Reihe. Wir wollen die Zahl A selbst den Grenzwert der Reihe der ganzen Zahlen

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

nennen und diese Beziehung durch die Gleichung

$$A = \lim_{k=\infty} A_k \qquad (p)$$

ausdrücken.

Auch hier soll unter der *Maßzahl von* A die gewöhnliche rationale oder irrationale Zahl

$$\bar{A} = a_0 + \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \cdots$$

verstanden werden, in welcher g irgend eine ein für alle Male fest angenommene oberhalb p liegende ganze Zahl bedeutet. Dann ist $\bar{A}$ der Grenzwert, welchem sich die Maßzahlen $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots$ der Näherungswerte $A_0, A_1, A_2, \ldots$ von A unbegrenzt annähern, d. h. es ist im gewöhnlichen Sinne

$$\bar{A} = \lim_{k=\infty} \bar{A}_k.$$

Von zwei Zahlen A und B unseres Bereiches bezeichne ich diejenige als die größere für den Bereich von p, deren Maßzahl den größeren Wert hat. Ist $A > B$ (p), so besteht für irgend zwei ganzzahlige Näherungswerte A_k und B_l dieselbe Ungleichung, sobald nur k und l groß genug gewählt sind.

Ist

$$A = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots,$$

ist also a_α der erste von Null verschiedene Koeffizient von A, so sage ich, *A besitzt für den Bereich von p die Ordnungszahl α.* Eine Zahl

$$E = e_0 + e_1 p + e_2 p^2 + \cdots,$$

für welche $e_0 > 0$ ist, heißt *eine Einheit für den Bereich von p.*

Zwei Zahlen

$$A = a_0, a_1 a_2 \ldots, \quad A' = a'_0, a'_1 a'_2 \ldots$$

heißen *gleich*, wenn ihre Näherungswerte

$$A_0, A_1, A_2, \ldots, \quad A'_0, A'_1, A'_2, \ldots$$

für genügend große Indizes kongruent sind für jede noch so hohe Potenz von p als Modul, wenn also für eine beliebig hohe Potenz p^M von p die Kongruenzen

$$A_k \equiv A'_l \pmod{p^M}$$

bestehen, sobald k und l genügend groß angenommen werden. Hieraus folgt sofort, daß A dann und nur dann gleich A' ist, wenn die entsprechenden reduzierten Zahlen a_i und a'_i alle gleich sind, also wenn A und A' gleiche Ziffern haben, oder wenn die Grenzwerte der Maßzahlen der Näherungswerte von A einander gleich sind.

Wir wollen auch hier von der Beschränkung absehen, daß die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ der Zahlen A reduziert, d. h. kleiner als p sein sollen, und auch Reihen

$$(1.) \qquad A = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 p + \bar{a}_2 p^2 + \cdots$$

betrachten, deren Koeffizienten entweder beliebige ganze Zahlen, oder auch ebenfalls unendliche Reihen, d. h. allgemeine Zahlgrößen unseres Bereiches sind. Dann besteht der wichtige Satz:

> Jede Zahlgröße $A = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 p + \cdots$ ist einer eindeutig bestimmten reduzierten Zahlgröße $a_0 + a_1 p + \cdots$ gleich.

Denn schreibt man jene Reihe (1.) in der Form

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1 p + \bar{a}_2 p^2 + \cdots = (\bar{a}_0 - p\varepsilon_1) + (\varepsilon_1 + \bar{a}_1 - p\varepsilon_2) p + (\varepsilon_2 + \bar{a}_2 - p\varepsilon_3) p^2 + \cdots,$$

so kann man sukzessive $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ so bestimmen, daß die Koeffizienten der Reihe rechts, so weit man auch gehen mag, modulo p reduzierte Zahlen sind; und die rechts stehende reduzierte Reihe ist der gegebenen nach der soeben aufgestellten Definition gleich, da ihre Näherungswerte zuletzt für jede noch so hohe Potenz von p als Modul kongruent werden.

Speziell ist die durch die Reihe

$$O = p, p-1\ p-1\ p-1\ \ldots$$

definierte Zahlgröße O gleich Null, da sie gleich der Reihe

$$O = p + p(p-1) + p^2(p-1) + \cdots$$

ist, deren Näherungswerte $O_k = p^{k+1}$ mit wachsendem k durch jede noch so hohe Potenz von p teilbar sind. Aus demselben Grunde ist auch die Reihe

$$O_r = 0, 0\,0 \ldots p\ p-1\ p-1 \ldots$$

gleich Null, weil sie gleich $p^r \cdot O$ ist. Allgemein ist eine nicht reduzierte Zahl

$$O = o_0 + o_1 p + o_2 p^2 + \cdots$$

dann und nur dann gleich Null, wenn ihre Koeffizienten die Gleichungen

$$\begin{aligned} o_0 &= p\varepsilon_1, \\ o_1 + \varepsilon_1 &= p\varepsilon_2, \\ o_2 + \varepsilon_2 &= p\varepsilon_3, \\ &\cdots \end{aligned}$$

erfüllen, d. h. wenn man die Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ so bestimmen kann, daß alle diese Gleichungen befriedigt werden. Man erkennt die Richtigkeit der Behauptung, wenn man O in der Form schreibt:

$$O = (o_0 - p\varepsilon_1) + (o_1 + \varepsilon_1 - p\varepsilon_2)p + \cdots + (o_k + \varepsilon_k - p\varepsilon_{k+1})p^k + \cdots.$$

Wäre nämlich der Koeffizient von p^k der erste, welcher nicht durch geeignete Wahl von ε_{k+1} zu Null gemacht werden kann, so wird der $(k+1)$-te Näherungswert und alle folgenden durch p^{k+1} nicht teilbar, O ist daher dann größer als Null.

Unter der Summe $A+B$ und der Differenz $A-B$ zweier Zahlen A und B unseres Bereiches verstehe ich jetzt die Zahlen C und D, deren Näherungswerte

$$C_0, C_1, C_2, \ldots \quad \text{und} \quad D_0, D_1, D_2, \ldots$$

kongruent sind der Summe bez. der Differenz der Näherungswerte von A und B, d. h. bez. kongruent sind

$$A_0 + B_0, A_1 + B_1, \ldots \quad \text{und} \quad A_0 - B_0, A_1 - B_1, \ldots;$$

kürzer können wir jene beiden Definitionen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} A + B &= \lim_{k=\infty} (A_k + B_k) \qquad (p), \\ A - B &= \lim_{k=\infty} (A_k - B_k) \qquad (p) \end{aligned}$$

ausdrücken.

Es ist also in der nicht reduzierten Form:

$$\begin{aligned} A + B &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)p + (a_2 + b_2)p^2 + \cdots, \\ A - B &= (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)p + (a_2 - b_2)p^2 + \cdots, \end{aligned}$$

und in der reduzierten Form geschrieben:

$$A+B = (a_0-p\varepsilon_1+b_0)+(a_1+\varepsilon_1-p\varepsilon_2+b_1)p+(a_2+\varepsilon_2-p\varepsilon_3+b_2)p^2+\cdots,$$
$$A-B = (a_0+p\varepsilon_1-b_0)+(a_1-\varepsilon_1+p\varepsilon_2-b_1)p+(a_2-\varepsilon_2+p\varepsilon_3-b_2)p^2+\cdots.$$

So erhält man eindeutig bestimmte reduzierte Zahlen C und D für $A+B$ und $A-B$. Diese Definitionen lassen sich auch in der Form

$$A \pm B = \lim_{k=\infty}(A_k \pm B_k) \qquad (p)$$

schreiben. Man erkennt auch ohne weiteres, daß man zur Bildung der Summe und der Differenz die auf Seite 55 und 56 für ganze Zahlen angegebenen Rechenvorschriften anzuwenden hat, mit der Maßgabe, daß, falls

$$A = a_0, a_1 a_2 \ldots a_\varrho$$

eine ganze Zahl sein sollte, eventuell zur Bildung von $A-B$ der Minuendus A in der nicht reduzierten Form

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_\varrho + p\ p-1\ p-1 \ldots$$

zu schreiben ist.

Ebenso verstehe ich unter dem Produkt AB diejenige Zahl C, deren Näherungswerte $C_0, C_1, C_2 \ldots$ für eine beliebig hohe Potenz von p den Produkten

$$A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, \ldots$$

aus den Näherungswerten von A und B kongruent werden, so daß also

$$AB = \lim_{k=\infty}(A_kB_k) \qquad (p)$$

ist. Dann erkennt man sofort, daß die Zahl $C = AB$ eindeutig bestimmt und in ihrer nicht reduzierten Form wieder gleich

$$C = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)p+\cdots$$

ist. Aus dieser Definition des Produktes folgt speziell, daß jede Zahl

$$A = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1}p^{\alpha+1}+\cdots,$$

deren Ordnungszahl gleich α ist, in der Form

$$A = p^\alpha \cdot E = p^\alpha(a_\alpha + a_{\alpha+1}p+\cdots)$$

dargestellt werden kann, wo E eine Einheit unseres Bereiches bedeutet. Sind ferner

$$A = p^\alpha E, \quad B = p^\beta E'$$

zwei beliebige Zahlen, α und β ihre Ordnungszahlen, und beachtet man, daß auch hier das Produkt zweier Einheiten wieder eine solche ist, so erhält man für das Produkt die Darstellung

$$AB = p^{\alpha+\beta} EE' = p^{\alpha+\beta} \overline{E}.$$

Die Ordnungszahl eines Produktes ist also stets gleich der Summe der Ordnungszahlen seiner Faktoren.

Das Produkt zweier Zahlen A und B ist dann und nur dann gleich Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Denn sind beide Zahlen von Null verschieden und ist $A = p^k E$, $B = p^l E'$, so ist ihr Produkt

$$AB = p^{k+l} EE'$$

sicher nicht gleich Null, da EE' wieder eine Einheit ist.

Sind endlich zunächst

$$A = a_0, a_1 a_2 \ldots, \quad B = b_0, b_1 b_2 \ldots$$

zwei Einheiten unseres Bereiches, also a_0 und b_0 von Null verschieden, so verstehe ich unter dem Quotienten $\frac{A}{B}$ diejenige Zahl G, deren Näherungswerte $G_0, G_1, G_2 \ldots$ mit den Quotienten

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \ldots$$

für beliebig hohe Potenzen von p als Modul übereinstimmen, sodaß also

$$\frac{A}{B} = \lim_{k=\infty} \frac{A_k}{B_k} \qquad (p)$$

ist. Auch durch diese Forderung ist G innerhalb unseres Bereiches eindeutig bestimmt und kann mit jeder verlangten Genauigkeit durch das auf Seite 58 angegebene Divisionsverfahren gefunden werden. Man erkennt auch aus der Kongruenz

$$c_0 \equiv \frac{a_0}{b_0} \quad \text{oder} \quad c_0 b_0 \equiv a_0, \qquad (\text{mod } p)$$

daß auch $c_0 > 0$, daß also der Quotient zweier Einheiten wieder eine Einheit ist.

Sind dagegen A und B keine Einheiten, ist also etwa

$$A = p^\alpha E, \qquad B = p^\beta E'$$

und definiert man den Quotienten $\frac{A}{B}$ genau ebenso, wie dies vorher geschah, so wird

$$\frac{A}{B} = p^{\alpha-\beta}\frac{E}{E'} = p^{\alpha-\beta}E.$$

Damit also die Division zweier Zahlen unseres Bereiches durcheinander unbeschränkt ausführbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß wir auch solche Zahlgrößen

$$G = \frac{G_{-\varrho}}{p^{\varrho}} + \frac{G_{-(\varrho-1)}}{p^{\varrho-1}} + \cdots + \frac{G_{-1}}{p} + G_0 + G_1 p + \cdots$$

in denselben aufnehmen, welche eine negative Ordnungszahl haben, deren Entwicklung also mit einer endlichen Anzahl negativer Potenzen von p beginnt. Wir wollen dies tun und eine Zahl für den Bereich von p *ganz* oder *gebrochen* nennen, wenn sie keine negativen Potenzen von p oder eine endliche Anzahl besitzt. Der gebrochenen Zahl G geben wir dann die Ordnungszahl $-\varrho$, wenn die Entwicklung mit $\frac{G_{-\varrho}}{p^{\varrho}}$ beginnt, wenn also

$$G = p^{-\varrho}E$$

ist. Dann besteht der Satz:

Die Ordnungszahl des Quotienten zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Ordnungszahlen von Zähler und Nenner.

Wir wollen die Gesamtheit aller Zahlgrößen

$$A = a_{\varrho}p^{\varrho} + a_{\varrho+1}p^{\varrho+1} + \cdots,$$

deren Koeffizienten wohldefinierte Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, p-1$ sind, und deren Ordnungszahl ϱ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null ist, einen *Zahlkörper* nennen und durch $K(p)$ bezeichnen. Die bis jetzt durchgeführten Betrachtungen lehren dann, daß der Körper $K(p)$ in der Weise abgeschlossen ist, daß die vier elementaren Rechenoperationen, auf zwei oder mehrere Zahlen des Körpers $K(p)$ angewandt, wieder zu Zahlen desselben Körpers führen. Nur muß man natürlich die Division durch die Null ausschließen.

Analog wollen wir die Gesamtheit aller *gewöhnlichen* positiven, negativen, ganzen und gebrochenen Zahlen auch einen Zahlkörper nennen und ihn zum Unterschiede durch $K(1)$ bezeichnen. Auch hier führt die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier Zahlen von $K(1)$ wieder zu

Zahlen desselben Bereiches. Jede Zahl des Körpers $K(1)$ ist einer einzigen Zahl von $K(p)$ gleich, aber wir werden sofort sehen, daß nicht das Umgekehrte gilt. Wir können somit den Körper $K(1)$ als einen Teilkörper von $K(p)$ bezeichnen.

Eine rationale Gleichung

$$R(A, B, C, \ldots, D) = 0 \qquad (p)$$

zwischen beliebig vielen Zahlen $A, B, C, \ldots D$ von $K(p)$ ist dann und nur dann erfüllt, wenn dieselbe Kongruenz zwischen ihren Näherungswerten

$$R(A_k, B_k, C_k, \ldots, D_k) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p^{\nu})$$

für jede noch so hohe Potenz von p als Modul erfüllt ist, falls k genügend groß angenommen wird, sodaß also jene Gleichung auch in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\lim_{k=\infty} R(A_k, B_k, C_k, \ldots, D_k) = 0 \qquad (p).$$

Eine derartige Gleichung für den Bereich von p kann in genau derselben Weise umgeformt werden wie eine gewöhnliche Gleichung. Denn es gelten auch hier die Sätze:

Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches,
Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches,
Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches,
Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches, falls der Divisor Null ein für alle Male ausgeschlossen wird.

Sehr einfache Betrachtungen, welche denen für die Untersuchung gewöhnlicher Dezimalbrüche durchaus analog sind, beweisen nun die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Eine Zahl des Bereiches $K(p)$ ist dann und nur dann rational, wenn sie periodisch ist.

Zunächst ergibt sich nämlich der Satz:

Jeder negative echte Bruch des Bereiches $K(1)$, dessen Nenner p nicht enthält, ist einer rein periodischen Zahl des Bereiches $K(p)$ gleich und umgekehrt.

Ist nämlich

$$x = a_0, \overline{a_1\, a_2 \ldots a_{\nu-1}\ a_0\, a_1 \ldots a_{\nu-1}} \ldots$$

eine beliebige rein periodische Zahl des Bereiches $K(p)$, deren Periode genau ν Glieder enthält, so ist

$$p^\nu x = 0,00\ldots0\,\overline{a_0\,a_1\ldots a_{\nu-1}}\ldots,$$

also

$$x(1-p^\nu) = a_0, a_1\ldots a_{\nu-1} = m = a_0+a_1 p+\cdots+a_{\nu-1}p^{\nu-1},$$

wo m eine unterhalb $p^\nu-1$ liegende gewöhnliche ganze Zahl ist; daher ist

$$x = -\frac{m}{p^\nu-1},$$

also wirklich ein negativer echter Bruch; und zwar ist $p^\nu-1$ offenbar die kleinste unter den Zahlen $p^{\bar\nu}-1$, für welche die Zahl $x(1-p^{\bar\nu})$ ganz ist, weil andernfalls x eine kürzere Periode haben würde. Ist umgekehrt

$$x = -\frac{m_1}{n_1}$$

ein negativer echter Bruch in seiner reduzierten Form, dessen Nenner p nicht enthält, und gehört p modulo n_1 zum Exponenten ν, sodaß

$$p^\nu-1 = n_1\,\bar n$$

ist, so besteht die Gleichung

$$x = -\frac{m_1\,\bar n}{p^\nu-1} = +\frac{m}{1-p^\nu} = m(1+p^\nu+p^{2\nu}+\cdots),$$

wo $m = a_0+a_1 p+\cdots+a_{\nu-1}p^{\nu-1}$ gesetzt werden kann, weil $m<p^\nu-1$ ist. So ergibt sich die Gleichung

$$x = \overline{a_0, a_1\ldots a_{\nu-1}}\;\overline{a_0\,a_1\ldots a_{\nu-1}}\ldots,$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen. Zugleich sehen wir, daß die rein periodische Zahl x gleich ist dem negativen echten Bruche

$$-\frac{m}{p^\nu-1},$$

wo $m = a_0, a_1\ldots a_{\nu-1}$ aus den Ziffern der Periode besteht und ν gleich der Anzahl dieser Ziffern ist.

Fügt man aber zu einer rein periodischen Zahl

$$\overline{a_0, a_1\ldots a_{\nu-1}}\;\overline{a_0\,a_1\ldots a_{\nu-1}}\ldots$$

eine positive oder negative ganze Zahl

$$b_0, b_1 \ldots b_\varrho \text{ bez. } c_0, c_1 \ldots c_\varrho\, p-1\; p-1\; p-1 \ldots$$

hinzu, so erhält man offenbar wieder eine, und zwar eine gemischt periodische Zahl; dasselbe ist der Fall, wenn man mit einer ganzen positiven oder negativen Potenz von p multipliziert. Da man aber auf diese Weise aus den negativen echten Brüchen alle rationalen Brüche erhält, so ist dadurch der Beweis unserer Behauptung in seinem vollen Umfange erbracht und wir können daher den Satz aussprechen:

Der Teilbereich $K(1)$ von $K(p)$ enthält alle und nur die periodischen Zahlen von $K(p)$.

§ 3.

Ich betrachte jetzt die rationalen ganzen Funktionen von x

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n,$$

deren Koeffizienten Zahlen des Bereiches $K(p)$ sind. Wenn alle Koeffizienten A_i ganze Zahlen sind, also keiner von negativer Ordnung ist, so nennen wir $f(x)$ eine ganze *ganzzahlige* Funktion von x. Zieht man aus allen Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots A_n$ die größte in ihnen allen gemeinsam enthaltene Potenz p^δ von p heraus, so kann man $f(x)$ in der Form schreiben:

$$f(x) = p^\delta f_0(x),$$

wo $f_0(x)$ eine ganze ganzzahlige Funktion von x ist, deren Koeffizienten nun nicht mehr sämtlich durch p teilbar sind. Dann soll p^δ *der Zahlenteiler jener Funktion* genannt werden und $f_0(x)$ eine *primitive* Funktion für den Bereich von p heißen. Nach dem Vorgange von *Gauß* beweist man leicht, daß das Produkt zweier primitiven Funktionen $f_0(x)$ und $g_0(x)$ wieder primitiv ist. Der Einfachheit wegen wollen wir zunächst nur ganzzahlige Funktionen von x betrachten, in welchen der Koeffizient A_0 der höchsten Potenz von x gleich Eins ist. Es sei nun

$$A = a_0, a_1 a_2 \ldots$$

irgend einer der n Gleichungskoeffizienten und

$$A^{(0)} = a_0, \quad A^{(1)} = a_0, a_1, \quad A^{(2)} = a_0, a_1 a_2, \ldots$$

seine Näherungswerte. Dann sollen die ganzen ganzzahligen Funktionen von x des Bereiches $K(1)$

$$(1.)\qquad \begin{cases} f_0(x) = x^n + A_1^{(0)} x^{n-1} + \cdots + A_n^{(0)} \\ f_1(x) = x^n + A_1^{(1)} x^{n-1} + \cdots + A_n^{(1)} \\ \quad \vdots \\ f_k(x) = x^n + A_1^{(k)} x^{n-1} + \cdots + A_n^{(k)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

deren Koeffizienten gewöhnliche ganze positive Zahlen des Bereiches $K(1)$ sind, der erste, zweite, ..., k-te ... Näherungswert von $f(x)$ für den Bereich von p heißen. Diese bilden dann eine solche Folge gewöhnlicher ganzzahliger Funktionen von x, daß für je zwei auf einander folgende Funktionen die Kongruenz:

$$f_k(x) \equiv f_{k-1}(x) \qquad (\mathrm{mod}\ p^k)$$

besteht, weil sich je zwei entsprechende Koeffizienten $A_i^{(k-1)}$ und $A_i^{(k)}$ nur um eine Zahl $a_k^{(i)} p^k$ unterscheiden. Oder es ist:

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) + \mathfrak{f}_k(x)\, p^k,$$

wenn

$$\mathfrak{f}_k(x) = a_k^{(1)} x^{n-1} + a_k^{(2)} x^{n-2} + \cdots + a_k^{(n)}$$

eine ganze ganzzahlige Funktion von x mit modulo p reduzierten Koeffizienten bedeutet. Wir können wieder setzen:

$$f(x) = \lim_{k=\infty} f_k(x) \qquad (p).$$

Jede der ganzzahligen Funktionen des Bereiches $K(1)$

$$f_k(x) = x^n + A_1^{(k)} x^{n-1} + \cdots + A_n^{(k)},$$

welche die Näherungswerte von $f(x)$ bilden, besitzt nun, gleich Null gesetzt, im gewöhnlichen Sinne n Wurzeln

$$\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)},$$

deren symmetrische Grundfunktionen die Koeffizienten $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)}$ mit abwechselndem Vorzeichen sind. Ist nun

$$G(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)})$$

irgend eine ganzzahlige symmetrische Funktion dieser Wurzeln, so ist sie gleich einer ganzen ganzzahligen Funktion

$$\mathfrak{G}(A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$$

der Gleichungskoeffizienten von $f(x)$. Bildet man also für die sämtlichen Näherungswerte $f_0(x), f_1(x), \ldots$ dieselbe symmetrische Funktion

$$G(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)}), \qquad G(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}), \ldots$$

so ergeben die ihnen gleichen ganzen Zahlen

$$\mathfrak{G}(A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \ldots A_n^{(0)}), \qquad \mathfrak{G}(A_1^{(1)}, A_2^{(1)} \ldots A_n^{(1)}), \ldots$$

eine Reihe, für deren Glieder offenbar ebenfalls die Kongruenzen

$$\mathfrak{G}(A_1^{(k-1)}, \ldots, A_n^{(k-1)}) \equiv \mathfrak{G}(A_1^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)}) \pmod{p^k}$$

bestehen; sie sind daher die Näherungswerte der Zahl

$$\mathfrak{G}(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \lim_{k=\infty} \mathfrak{G}(A_1^{(k)}, \ldots, A_n^{(k)})$$

des Bereiches $K(p)$, welche dieselbe ganze Funktion der Koeffizienten $A_1, \ldots, A_n$ ist.

So besitzt z. B. die Funktion $f(x)$ eine Diskriminante

$$D(f(x)),$$

welche ebenfalls eine Zahl unseres Bereiches $K(p)$ und aus den Koeffizienten von $f(x)$ in bekannter Weise, z. B. in Determinantenform, zu bilden ist; und ihr sind die Diskriminanten der Näherungsfunktionen $f_k(x)$ für eine beliebig hohe Potenz von p kongruent, sobald man nur k groß genug wählt.

Ebenso haben zwei Funktionen μ-ten und ν-ten Grades

$$f(x) \text{ und } g(x)$$

eine bestimmte Eliminationsresultante

$$R(f, g),$$

welche ebenfalls in Determinantenform geschrieben werden kann; und ihr sind die Eliminationsresultanten

$$R(f_k, g_k) = \prod_{r=1}^{\mu} \prod_{\varrho=1}^{\nu} (\alpha_r^{(k)} - \beta_\varrho^{(k)})$$

der Näherungsfunktionen von $f(x)$ und $g(x)$

$$f_k(x) = (x - \alpha_1^{(k)}) \ldots (x - \alpha_\mu^{(k)})$$
$$g_k(x) = (x - \beta_1^{(k)}) \ldots (x - \beta_\nu^{(k)})$$

bei genügend großem k für eine beliebig hohe Potenz von p kongruent.

Ist endlich

$$F(x) = f(x)\,g(x) \qquad (p) \tag{2.}$$

die Zerlegung einer Funktion n-ten Grades des Bereiches $K(p)$ in zwei Faktoren desselben Bereiches bez. vom μ-ten und ν-ten Grade, so ist für jede Potenz von p als Modul:

$$F_k(x) \equiv f_k(x)\,g_k(x) \qquad (\mathrm{mod}\ p^{k+1}).$$

Sind dann

$$\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}$$

die n Wurzeln der Gleichung $F_k(x) = 0$ und

$$\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_\mu^{(k)} \quad \text{bez.} \quad \gamma_1^{(k)}, \ldots, \gamma_\nu^{(k)}$$

die Wurzeln von $f_k(x) = 0$ bez. $g_k(x) = 0$, so besteht für den Modul p^{k+1} zwischen den Diskriminanten von $F_k(x)$, $f_k(x)$ und $g_k(x)$ und der Eliminationsresultante $R(f_k(x), g_k(x))$ die Kongruenz

$$\begin{aligned} \prod_{h \gtrless g}(\alpha_g^{(k)} - \alpha_h^{(k)}) \equiv{}& \prod(\beta_{g'}^{(k)} - \beta_{h'}^{(k)}) \prod(\gamma_{g''}^{(k)} - \gamma_{h''}^{(k)}) \times \\ & \prod(\beta_{g'}^{(k)} - \gamma_{h''}^{(k)}) \prod(\gamma_{h''}^{(k)} - \beta_{g'}^{(k)}) \qquad (\mathrm{mod}\ p^{k+1}) \end{aligned}$$

oder

$$D(F_k(x)) \equiv \pm D(f_k(x))\,D(g_k(x))\,R^2(f_k(x), g_k(x)) \ (\mathrm{mod}\ p^{k+1});$$

und da diese Kongruenz für jede noch so hohe Potenz von p als Modul gilt, so ist sie auch für die Grenzwerte erfüllt, d. h. aus der Gleichung (2.) ergibt sich die Beziehung

$$D(F(x)) = \pm D(f(x))\,D(g(x))\,R^2(f(x), g(x)) \qquad (p),$$

welche für gewöhnliche Gleichungen bekannt, nunmehr also auch für Funktionen des Bereiches $K(p)$ bewiesen ist.

Man erkennt ohne weiteres, daß diese Resultate in ihrem ganzen Umfange bestehen bleiben, wenn man den Koeffizienten A_0 der höchsten Potenz von x nicht gleich Eins, oder wenn man die Koeffizienten auch von negativer Ordnung annimmt. Ebenso kann man für $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ auch eine rationale gebrochene symmetrische Funktion der Wurzeln von $f(x) = 0$ voraussetzen.

Die Gesamtheit aller ganzen oder gebrochenen Funktionen von x mit Koeffizienten des Bereiches $K(p)$ bilden wieder einen Bereich $K(p, x)$, dessen Elemente sich durch die vier elementaren Rechenoperationen wiedererzeugen. Analog soll $K(1, x)$ die Gesamtheit oder den Körper aller rationalen Funktionen bedeuten, deren Koeffizienten beliebige rationale

Zahlen oder Zahlen des Bereiches $K(1)$ sind. Für diesen Bereich $K(p, x)$ sind offenbar alle Methoden und Resultate der elementaren Algebra, soweit diese nur rationale Operationen voraussetzen, ohne weiteres auch in dem Falle giltig, daß die Koeffizienten nicht bloß rationale Zahlen von $K(1)$, sondern beliebige Größen des Bereiches $K(p)$ sind. Ich will die wichtigsten Sätze dieser Art daher nur angeben.

Ist $\xi = \xi_0, \xi_1 \xi_2 \ldots$ eine beliebige Zahl des Bereiches $K(p)$, so läßt sich die ganze Funktion $f(x)$ nach dem *Taylor*schen Satze folgendermaßen nach Potenzen von $x-\xi$ entwickeln:

$$f(x) = f(\xi)+(x-\xi) f'(\xi)+(x-\xi)^2 \frac{f''(\xi)}{2!}+\cdots+(x-\xi)^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Ich nenne ξ eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0 \qquad (p),$$

wenn die Zahl $f(\xi)$ des Bereiches $K(p)$ in dem auf Seite 61 dargelegten Sinne gleich Null ist. Dann folgt aus der obigen Darstellung von $f(x)$ der Satz:

Besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ die Wurzel $x = \xi$, so ist ihre linke Seite durch den zugehörigen Linearfaktor $x-\xi$ teilbar.

Die Zahl $x = \xi$ heißt eine h-fache Wurzel jener Gleichung, wenn ihre linke Seite genau durch $(x-\xi)^h$ teilbar ist; dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Ableitungen

$$f(x), f'(x), \ldots, f^{(h-1)}(x)$$

für $x = \xi$ verschwinden, während $f^{(h)}(\xi)$ nicht Null ist.

Eine Gleichung n-ten Grades kann nicht mehr als n gleiche oder verschiedene Wurzeln haben, es sei denn, daß alle ihre Koeffizienten Null sind. Besitzt $f(x) = 0$ die k gleichen oder verschiedenen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$, so besteht für ihre linke Seite die Zerlegung

$$f(x) = (x-\xi_1) \ldots (x-\xi_k) f_{k+1}(x) \qquad (p),$$

wo $f_{k+1}(x)$ eine ganze Funktion des $(n-k)$-ten Grades bedeutet.

Eine Funktion $f(x)$ heißt teilbar durch eine andere $\delta(x)$, wenn $f(x) = \delta(x) f_1(x)$ und $f_1(x)$ eine ganze Funktion ist. Man kann sich stets durch einfache Division überzeugen, ob $\delta(x)$ in $f(x)$ enthalten ist oder nicht.

Zwei ganze Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ besitzen den gemeinsamen Teiler $\delta(x)$, wenn $\delta(x)$ sowohl in $f(x)$ als auch in $g(x)$ enthalten ist.

Alle gemeinsamen Teiler $\delta(x)$ sind die sämtlichen Divisoren des „größten gemeinsamen Teilers“ $d(x)$ von $f(x)$ und $g(x)$; dieser kann durch Anwendung des Euklidischen Verfahrens zur Aufsuchung des größten gemeinsamen Teilers, also allein durch sukzessive Divisionen bestimmt werden.

Sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei ganze Funktionen vom μ-ten und vom ν-ten Grade und ist $d(x)$ ihr größter gemeinsamer Teiler, so liefern die sukzessiven Divisionen, welche zur Bestimmung von $f(x)$ führen, zugleich auch zwei solche Multiplikatoren $f_1(x)$ und $g_1(x)$, daß

$$f(x)\,g_1(x)+g(x)\,f_1(x)=d(x)$$

ist, und zwar sind $g_1(x)$ und $f_1(x)$ höchstens vom $(\nu-1)$-ten und vom $(\mu-1)$-ten Grade.

Besitzen $f(x)$ und $g(x)$ keinen gemeinsamen Teiler, ist also $d(x)=1$, so geht die obige Gleichung über in

$$f(x)\,g_1(x)+g(x)\,f_1(x)=1.$$

Etwas anders gestaltet sich dieses letzte Resultat, wenn man verlangt, daß die Multiplikatoren $f_1(x)$ und $g_1(x)$ ganzzahlige Koeffizienten haben sollen.

Es seien spezieller

$$f(x)=x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+\cdots+A_{\mu},$$
$$g(x)=x^{\nu}+B_1x^{\nu-1}+\cdots+B_{\nu}$$

zwei teilerfremde ganze Funktionen von x mit ganzen Koeffizienten des Bereiches $K(p)$, deren Eliminationsresultante

$$R(f,g)=r_{\varrho}\,p^{\varrho}+r_{\varrho+1}\,p^{\varrho+1}+\cdots=p^{\varrho}E,$$

also eine von Null verschiedene ganze Zahl ist, welche von der Ordnung ϱ sein möge. Diese Resultante ist gleich der Determinante $(\mu+\nu)$-ter Ordnung:

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} A_{\mu} & A_{\mu-1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{\mu} & \dots & A_1 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & A_{\mu} & A_{\mu-1} & \dots & 1 \\ B_{\nu} & B_{\nu-1} & \dots & B_1 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & B_{\nu} & \dots & & B_1 & 1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & B_{\nu} & B_{\nu-1} & \dots & 1 \end{vmatrix} \qquad (p).$$

Addiert man in dieser Determinante zu der ersten Spalte die der Reihe nach mit $x, x^2, \ldots, x^{\mu+\nu-1}$ multiplizierten übrigen Spalten und entwickelt sie dann nach ihrer ersten Vertikalreihe, so erhält man leicht eine Gleichung von der Form:

$$f(x)\,g_1(x)+g(x)\,f_1(x) = R(f,g) = p^\varrho \cdot E \qquad (p),$$

wo die komplementären Funktionen $f_1(x)$ und $g_1(x)$ höchstens vom $(\mu-1)$-ten und $(\nu-1)$-ten Grade sind und ganze Koeffizienten besitzen; oder wenn man durch E dividiert und die ganzen *ganzzahligen* Funktionen $\frac{g_1(x)}{E}$ und $\frac{f_1(x)}{E}$ wieder mit $f_1(x)$ und $g_1(x)$ bezeichnet, so folgt die Gleichung:

$$f(x)\,g_1(x)+g(x)\,f_1(x) = p^\varrho \qquad (p).$$

Verlangt man also, daß die Multiplikatoren $f_1(x)$ und $g_1(x)$ auch ganzzahlig sein sollen, so kann man nicht mehr die Zahl 1, wohl aber die Zahl p^ϱ homogen und linear durch $f(x)$ und $g(x)$ darstellen, wenn die Eliminationsresultante die Ordnungszahl ϱ besitzt.

Ist aber allgemeiner

$$F(x) = p^r F_0(x)$$

irgend eine ganzzahlige Funktion von x, deren Zahlenteiler p^r eine höhere als die ϱ-te Potenz von p ist, so ist auch $F(x)$ in gleicher Weise durch $f(x)$ und $g(x)$ darstellbar. Denn multipliziert man die obige Gleichung mit $p^{r-\varrho}F_0(x)$, so folgt:

$$f(x)\,(p^{r-\varrho}F_0(x)\,g_1(x))+g(x)\,(p^{r-\varrho}F_0(x)\,f_1(x)) = p^r F_0(x)$$

oder einfacher

$$(3.) \qquad f(x)\,(p^{r-\varrho}G_1(x))+g(x)\,(p^{r-\varrho}F_1(x)) = p^r F_0(x).$$

Wir nehmen endlich noch an, daß $F(x) = p^r F_0(x)$ von niedrigerem als dem $(\mu+\nu)$-ten Grade ist. Dann kann man $G_1(x)$ und $F_1(x)$ wieder auf den $(\nu-1)$-ten und $(\mu-1)$-ten Grad reduzieren. Dividieren wir nämlich $G_1(x)$ durch $g(x)$, so daß

$$G_1(x) = g(x)\,\lambda(x)+g_0(x)$$

wird, wo $g_0(x)$ eine ganze ganzzahlige Funktion höchstens vom $(\nu-1)$-ten Grade ist, so kann man die Gleichung (3.) auch in der Form

$$f(x)\,(p^{r-\varrho}(G_1(x)-g(x)\,\lambda(x)))+g(x)\,(p^{r-\varrho}(F_1(x)+f(x)\,\lambda(x))) = p^r F_0(x)$$

schreiben, oder in der abgekürzten Form:

$$f(x)\,(p^{r-\varrho}\,g_0(x))+g(x)\,(p^{r-\varrho}\,f_0(x)) = p^r\cdot F_0(x).$$

In dieser Gleichung haben die Multiplikatoren $f_0(x)$ und $g_0(x)$ die reduzierte Form. In der Tat steht dies für $g_0(x)$ bereits fest. Da ferner das erste Produkt $f(x)\,g_0(x)$ n. d. V. höchstens von $(\mu+\nu-1)$-ten Grade ist und das gleiche von $F_0(x)$ gilt, so kann auch das Produkt $g(x)\,f_0(x)$ höchstens diesen Grad haben, d. h. $f_0(x)$ höchstens vom $(\mu-1)$-ten Grade sein.

Sind also $f(x)$ und $g(x)$ zwei ganze ganzzahlige Funktionen von den Graden μ und ν, deren Eliminationsresultante die Ordnung ϱ hat, so kann man jede Funktion

$$F(x) = p^r\,F_0(x),$$

deren Grad kleiner als $\mu+\nu$ und deren Zahlenteiler p^r gleich oder größer als p^ϱ ist, in der Form

$$F(x) = f(x)\,G_1(x)+g(x)\,F_1(x) \qquad (p)$$

so darstellen, daß die Grade der komplementären Multiplikatoren $F_1(x)$ und $G_1(x)$ kleiner als μ und ν und ihre Zahlenteiler mindestens gleich $p^{r-\varrho}$ sind.

Natürlich gilt dieser Satz auch bei Kongruenzen für einen endlichen Modul p^M, welcher nur größer sein muß als p^ϱ.

Eine Funktion $f(x)$ heißt *unzerlegbar* oder *irreduktibel* für den Bereich von p, wenn sie nicht in Faktoren niedrigeren Grades zerlegt werden kann, deren Koeffizienten ebenfalls Zahlen des Bereiches $K(p)$ sind. Eine solche Funktion ist bis auf einen Zahlenfaktor bestimmt. Wir wollen auch diesen noch dadurch festlegen, daß wir in einer irreduktiblen Funktion den Koeffizienten der höchsten Potenz von x stets gleich Eins voraussetzen. Der Begriff der Irreduktibilität ist hier wesentlich enger gefaßt, als der entsprechende für den Bereich der gewöhnlichen ganzen Zahlen. Denn eine Funktion mit ganzzahligen Koeffizienten von $K(1)$ kann sehr wohl im Gebiete von $K(1)$ unzerlegbar sein, aber in dem weiteren Bereiche $K(p)$ in Faktoren niedrigeren Grades zerfallen.

Ist z. B. A eine Zahl aus dem Bereich $K(1)$, aber keine Quadratzahl, so ist die Funktion

$$x^2-A$$

in $K(1)$ irreduktibel. Dagegen zerfällt x^2-A im Bereiche $K(p)$ in das Produkt zweier Linearfaktoren $(x-\xi)(x-\xi')$, wenn man aus der Zahl

$$A = a_0, a_1 \ldots a_\varrho$$

innerhalb des Bereiches $K(p)$ die Quadratwurzel ausziehen kann. So ist z. B. x^2+1 im Gebiete der rationalen Zahlen unzerlegbar, dagegen besteht innerhalb des Bereiches $K(5)$ die Zerlegung

$$(x^2+1) = (x-2{,}121\ldots)(x-3{,}323\ldots).$$

Dagegen ist, wie man leicht erkennt, x^2-2 auch in diesem größeren Bereiche irreduktibel.

Man beweist nun genau wie in den Elementen der Algebra die folgenden Sätze:

Eine irreduktible Funktion ist in einer andern Funktion entweder als Teiler enthalten oder sie ist zu ihr teilerfremd.

Eine irreduktible Funktion ist in dem Produkte zweier oder mehrerer ganzen Funktionen nur dann enthalten, wenn sie in einem jener Faktoren enthalten ist.

Zwei Produkte irreduktibler Funktionen sind dann und nur dann gleich, wenn sie identisch sind.

Ist nämlich

$$A\,P_1(x)\,P_2(x)\ldots P_h(x) = B\,Q_1(x)\,Q_2(x)\ldots Q_k(x) \qquad (p),$$

wo A und B Zahlen und die $P_i(x)$ und $Q_k(x)$ irreduktible Funktionen sind, so muß z. B. die Funktion $P_1(x)$ mit einem der Faktoren $Q_k(x)$ identisch sein, weil sie ein Teiler des rechts stehenden Produktes ist. Ist aber $P_1(x)$ z. B. gleich $Q_1(x)$, so kann man die obige Gleichung durch $P_1(x)$ dividieren und dann für $P_2(x)$ in gleicher Weise weiter schließen usw. Zuletzt ergibt sich dann $A = B$ und damit der vollständige Beweis unserer Behauptung.

§ 4.

Ich beweise jetzt den für die ganze Theorie grundlegenden Satz:

Eine Funktion $F(x)$ des Bereiches $K(p, x)$ ist auf eine und nur eine Weise in irreduktible Faktoren zerlegbar, und es gibt ein endliches Verfahren, um diese Faktoren mit jeder vorgegebenen Genauigkeit zu berechnen.

Ist die Zerlegbarkeit einer Funktion in irreduktible Faktoren einmal bewiesen, so folgt aus dem am Schlusse des vorigen Abschnittes ausgesprochenen Satze, daß nur *eine* solche Zerlegung möglich ist. Ferner brauchen wir auch nur ein endliches Verfahren anzugeben, mit dessen Hilfe eine beliebige Funktion in *zwei* Faktoren niedrigeren Grades zerlegt oder bewiesen werden kann, daß eine solche Zerlegung nicht möglich ist. Ist nämlich

$$F(x) = f(x)\,g(x) \qquad (p), \tag{1.}$$

so kann ja jeder Faktor für sich weiter untersucht und in derselben Weise so lange fortgefahren werden, bis eine weitere Zerlegung nicht mehr möglich ist.

Wir wollen nun diesen Beweis führen und dabei der Einfachheit wegen die ganze ganzzahlige Funktion $F(x)$ in der Form

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n \tag{2.}$$

voraussetzen. Ist dann eine Zerlegung (1.) überhaupt möglich, so kann man die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ebenfalls in der Form:

$$\begin{cases} f(x) = x^\mu + B_1 x^{\mu-1} + \cdots + B_\mu, \\ g(x) = x^\nu + C_1 x^{\nu-1} + \cdots + C_\nu \end{cases} \tag{3.}$$

voraussetzen, wo die Koeffizienten B_i und C_k ebenfalls ganze Zahlen von $K(p)$ sind. Zunächst kann man ja die Koeffizienten von x^μ und x^ν durch Division zu Eins machen. Wären dann die Koeffizienten B_i und C_k nicht alle ganze Zahlen von $K(p)$ und wäre p^σ ihr Generalnenner, so ergäbe sich durch Multiplikation mit p^σ aus (1.) eine Gleichung:

$$p^\sigma F(x) = \bar{f}(x)\,\bar{g}(x) \qquad (p),$$

wo $\bar{f}(x)$ und $\bar{g}(x)$ primitive Funktionen sind. Da dann aber ihr Produkt wieder primitiv ist, so kann dasselbe nicht durch p^σ teilbar sein; unsere Behauptung ist somit bewiesen.

Besteht nun für $F(x)$ eine Zerlegung (1.), so folgt aus ihr für ein beliebig großes k die Kongruenz

$$F_k(x) \equiv f_k(x)\,g_k(x) \qquad (\mathrm{mod}\ p^{k+1}), \tag{4.}$$

in welcher $F_k(x)$, $f_k(x)$ und $g_k(x)$ die k-ten Näherungswerte jener Funktionen bedeuten. Eine Zerlegung von $F(x)$ in zwei Faktoren μ-ten und ν-ten Grades ist demnach nur dann möglich, wenn jeder ihrer Näherungswerte

$F_k(x)$ modulo p^{k+1} in zwei ganzzahlige Faktoren der gleichen Grade zerfällt, in welchen die höchsten Koeffizienten ebenfalls Eins sind.

Ob nun eine solche ganzzahlige Funktion $F_k(x)$ modulo p^{k+1} überhaupt in zwei Faktoren zerfällt oder nicht, kann für jedes beliebige k durch eine endliche Anzahl einfacher Versuche bestimmt werden. Man braucht ja nur alle modulo p^{k+1} inkongruenten ganzen ganzzahligen Funktionen vom $(n-1)$-ten oder von niedrigerem Grade hinzuschreiben, in denen der Koeffizient der höchsten Potenz von x gleich Eins ist, und je zwei unter ihnen, deren Grade sich zu n ergänzen, miteinander zu multiplizieren. Ist dann eines jener Produkte kongruent $F_k(x)$, so ist $F_k(x)$ modulo p^{k+1} zerlegbar, und man kennt dann auch eine solche Zerlegung. Im entgegengesetzten Falle ist $F_k(x)$ modulo p^{k+1} unzerlegbar. Dagegen folgt vorläufig aus der Zerlegbarkeit der Näherungsfunktionen $F_k(x)$ modulo p^{k+1} noch keineswegs die Zerlegbarkeit von $F(x)$ selbst. Durch die folgenden Betrachtungen wird aber die letzte Frage vollständig auf die Lösung der ersten zurückgeführt.

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß die Diskriminante von $F(x)$ von Null verschieden ist, und es sei

$$D(F) = p^{\delta} \cdot E$$

diese Diskriminante, also δ ihre Ordnungszahl.

Ist dann $F_r(x)$ irgend ein Näherungswert von $F(x)$, dessen Index r größer als δ ist, so ist

$$D(F_r(x)) \equiv D(F(x)) \pmod{p^{r+1}},$$

d. h. auch die Diskriminante von $F_r(x)$ besitzt genau die Ordnungszahl δ. Ist ferner

$$F_r(x) \equiv f_0(x)\, g_0(x) \pmod{p^{r+1}}$$

eine Zerlegung von $F_r(x)$ in zwei Faktoren, so besteht, wie auf S. 70 bewiesen wurde, die Kongruenz:

$$D(F_r(x)) \equiv \pm D(f_0(x))\, D(g_0(x))\, R^2(f_0, g_0) \pmod{p^{r+1}};$$

und da die Diskriminanten von $f_0(x)$ und $g_0(x)$ jedenfalls von nicht negativer Ordnung sind, so gilt für die Ordnungszahl ϱ der Eliminationsresultante R die Ungleichung:

$$2\varrho \leqq \delta.$$

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den folgenden wichtigen Satz:

Ist die Diskriminante von $F(x)$ von der Ordnung δ, so zerfällt die Funktion $F(x)$ dann und nur dann in Faktoren niedrigeren Grades, wenn ihr δ-ter Näherungswert $F_\delta(x)$ modulo $p^{\delta+1}$ zerfällt, und zwar entspricht jeder Zerlegung

$$F_\delta(x) \equiv \bar{f}(x)\,\bar{g}(x) \qquad (\text{mod } p^{\delta+1})$$

eine eindeutig bestimmte Zerlegung

$$F(x) = f(x)\,g(x) \qquad (p)$$

in der Weise, daß $\bar{f}(x)$ und $\bar{g}(x)$ Näherungswerte von $f(x)$ und $g(x)$ sind.

Um diesen Beweis gleich allgemein zu führen, nehme ich an, wir kennen eine Zerlegung

$$F_r(x) \equiv f_0(x)\,g_0(x) \qquad (\text{mod } p^{r+1})$$

irgend eines r-ten Näherungswertes von $F(x)$ in zwei Faktoren μ-ten und ν-ten Grades, für welchen $r \geqq \delta$ ist; dann zeige ich, daß man zwei Zusatzfunktionen $f_1(x)$ und $g_1(x)$ von niedrigerem als dem μ-ten und ν-ten Grade so bestimmen kann, daß auch für den nächsthöheren Näherungswert $F_{r+1}(x)$

$$(5.) \qquad F_{r+1}(x) \equiv (f_0(x)+f_1(x))\,(g_0(x)+g_1(x)) \qquad (\text{mod } p^{r+2})$$

ist. Fährt man dann in derselben Weise fort, so erhält man zwei Funktionen μ-ten und ν-ten Grades des Bereiches $K(p, x)$

$$f(x) = f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\cdots,$$
$$g(x) = g_0(x)+g_1(x)+g_2(x)+\cdots,$$

welche mit jeder vorgegebenen Genauigkeit berechnet werden können, und für welche die Gleichung

$$F(x) = f(x)\,g(x) \qquad (p)$$

besteht; unsere Aufgabe ist dann also vollständig gelöst.

Wir schreiben die Kongruenz (5.) in der Form

$$(5^a.) \quad F_{r+1}(x) - f_0(x)\,g_0(x) \equiv (f_0(x)\,g_1(x)+f_1(x)\,g_0(x))+f_1(x)\,g_1(x) \quad (\text{mod } p^{r+2})$$

und bestimmen $f_1(x)$ und $g_1(x)$ nun so, daß

$$(6.) \qquad f_0(x)\,g_1(x)+g_0(x)\,f_1(x) \equiv F_{r+1}(x) - f_0(x)\,g_0(x) \qquad (\text{mod } p^{r+2})$$

wird. Die rechte Seite besitzt dann den Zahlenteiler p^{r+1}, weil sowohl

$$F_r(x) - F_{r+1}(x)$$

als auch n. d. V. $F_r(x)-f_0(x)g_0(x)$ durch p^{r+1} teilbar sind. Bedeutet nun wieder ϱ die Ordnungszahl der Eliminationsresultante $R(f_0, g_0)$, so ist nach dem oben geführten Beweise $\varrho \leqq \frac{\delta}{2} \leqq \frac{r}{2}$. Also kann man nach dem auf Seite 76 bewiesenen Satze stets zwei ganze ganzzahlige Funktionen $f_1(x)$ und $g_1(x)$ so bestimmen, daß die Kongruenz (6.) erfüllt ist, und dieselben haben beide mindestens den Zahlenteiler

$$p^{r+1-\varrho}.$$

Daher besitzt ihr Produkt $f_1(x)\,g_1(x)$ mindestens den Teiler $p^{2r+2-2\varrho}$, dessen Exponent nach der oben gemachten Bemerkung nicht kleiner ist als $2r+2-r = r+2$, und ist daher durch p^{r+2} teilbar. Für die so bestimmten Funktionen $f_1(x)$ und $g_1(x)$ bestehen also in der Tat auch die Kongruenzen (5ª.) und (5.), und damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Als einen speziellen Fall dieses Satzes erwähne ich noch das folgende Theorem:

Ist die Diskriminante von $F(x)$ durch p nicht teilbar, so folgt schon aus jeder Zerlegung des *ersten* Näherungswertes

$$F_0(x) \equiv f_0(x)\,g_0(x) \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

für den Modul p eine eindeutig bestimmte Zerlegung

$$F(x) = f(x)\,g(x) \qquad (p)$$

für den Bereich $K(p)$ in der Weise, daß die Funktionen $f_0(x)$ und $g_0(x)$ die ersten Näherungswerte von $f(x)$ und $g(x)$ sind.

Eine solche Funktion ist daher dann und nur dann irreduktibel, wenn ihr erster Näherungswert $F_0(x)$ modulo p irreduktibel ist.

Mit Hilfe dieser Resultate ergibt sich z. B. die Auflösung der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$x^2 - A = 0 \qquad (p)$$

unmittelbar. Dieselbe besitzt nämlich dann und nur dann zwei Wurzeln, wenn ihre linke Seite in diesem Bereiche zerlegbar ist. Ihre Diskriminante ist aber

$$D(x^2 - A) = 4A.$$

Ist also p eine ungerade Primzahl und

$$A = p^{\alpha}(a_0 + a_1 p + \cdots),$$

so besitzt die Diskriminante die Ordnungszahl α, und die Funktion $x^2 - A$ zerfällt dann und nur dann in zwei Linearfaktoren, wenn ihr α-ter Näherungswert

$$x^2 - a_0 p^\alpha$$

modulo $p^{\alpha+1}$ in zwei Faktoren zerfällt; dies ist aber offenbar nur dann der Fall, wenn

$$\alpha = 2\delta \quad \text{und} \quad \left(\frac{a_0}{p}\right) = +1 \quad \text{ist.}$$

Ist dagegen $p = 2$, so besitzt die Diskriminante die Ordnungszahl $\alpha+2$, und $x^2 - A$ besitzt dann und nur dann zwei Linearfaktoren, wenn der $(\alpha+2)$-te Näherungswert

$$x^2 - 2^\alpha (1 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2)$$

modulo $2^{\alpha+3}$ in zwei Faktoren zerfällt. Dazu muß wieder

$$\alpha = 2\delta \text{ und } x \equiv 2^\delta (1 + \xi_1 . 2 + \xi_2 . 2^2) \pmod{2^{\alpha+3}}$$

sein, wo ξ_1 und ξ_2 der Kongruenz

$$(1 + 2\xi_1 + 2^2 \xi_2)^2 \equiv (1 + 2a_1 + 2^2 a_2) \pmod 8$$

oder

$$1 + 4\xi_1(\xi_1 + 1) \equiv 1 \equiv 1 + 2a_1 + 2^2 a_2 \pmod 8$$

genügen müssen, d. h. es muß $a_1 = a_2 = 0$ sein.

Somit ergeben sich für die Auflösbarkeit der Gleichung

$$x^2 - A = 0 \qquad (p)$$

oder der Kongruenz

$$x^2 - A \equiv 0 \pmod{p^k}$$

für ein beliebig großes k die Bedingungen, daß erstens die Ordnung α des Koeffizienten $A = p^\alpha E$ eine gerade Zahl sein muß, ferner daß für ein ungerades p die erste Ziffer von E quadratischer Rest von p, für $p = 2$ aber E von der Form $8h+1$ sein muß.

Wir wollen nunmehr die obigen Resultate anwenden zur Zerlegung einer beliebigen ganzzahligen Funktion

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

deren Koeffizienten ganze Zahlen des Bereiches $K(1)$ sind im Bereiche einer beliebigen Primzahl p.

Hier ist die Diskriminante $D(F)$ eine gewöhnliche ganze Zahl des Bereiches $K(1)$. Da sie demnach nur eine endliche Anzahl von Primteilern $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ besitzt, so gilt der Satz:

Ist p eine Primzahl, welche nicht zu den Diskriminantenteilern $q_1, \ldots, q_\mu$ von $F(x)$ gehört, so zerfällt $F(x)$ in dem Bereiche $K(p, x)$ in genau so viele irreduktible Teiler, als sie Teiler für den Primmodul p hat.

Diese Teiler sind sämtlich modulo p betrachtet inkongruent. In der Tat sei $F(x)$ eine beliebige Funktion des Bereiches $K(1, x)$, deren Diskriminante $D(F)$ eine Einheit für den Bereich von p, also nicht durch p teilbar ist und

$$F_0(x) \equiv f_1^{(0)}(x)\, f_2^{(0)}(x) \ldots f_h^{(0)}(x) \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

die Zerlegung des ersten Näherungswertes $F_0(x)$ von $F(x)$ in seine modulo p irreduktiblen Faktoren. Dann müssen alle jene h Faktoren von einander verschieden sein; geht man nämlich auf beiden Seiten zu den Diskriminanten über, so folgt:

$$D(F_0) \equiv \pm \prod_{i=1}^{h} D(f_i^{(0)}(x)) \prod_{i \lesseqgtr k} R^2(f_i^{(0)}(x), f_k^{(0)}(x)) \qquad (\mathrm{mod}\ p);$$

und da die linke Seite p nicht enthält, so darf keine Funktion $f_i(x)$ einer andern $f_k(x)$ kongruent (mod p) sein, da andernfalls ihre Eliminationsresultante $R(f_i^{(0)}, f_k^{(0)})$ kongruent Null wäre.

Da nun zu jedem dieser Faktoren $f_i^{(0)}(x)$ eindeutig ein Faktor gleichen Grades von $F(x)$ gehört, so ergibt sich für $F(x)$ hieraus eine Zerlegung:

$$F(x) = f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_h(x) \qquad (p),$$

deren Faktoren sämtlich schon modulo p inkongruent sind.

Ist dagegen $D(F_0)$ durch p teilbar, so muß mindestens eine der Resultanten $R(f_i^{(0)}(x), f_k^{(0)}(x))$ auch durch p teilbar, d. h. mindestens zwei der Faktoren $f_i^{(0)}(x)$ einander gleich sein, weil ja die Diskriminanten $D(f_i^{(0)}(x))$ der irreduktiblen Funktionen $f_i^{(0)}(x)$ nicht p enthalten können. Es folgt also der Satz:

> Die Diskriminante einer Funktion $F(x)$ aus dem Bereiche $K(1, x)$ ist dann und nur dann durch p nicht teilbar, wenn der erste Näherungswert $F_0(x)$ modulo p in lauter verschiedene Primfaktoren zerfällt.

Es sei nun allgemein $F(x)$ für den Bereich $K(p)$ irreduktibel, aber die Diskriminante $D(F)$ möge durch eine beliebige Potenz von p teilbar

sein. Dann muß der erste Näherungswert $F_0(x)$ modulo p kongruent der Potenz eines Primfaktors sein, d. h. es muß eine Kongruenz bestehen:

$$F_0(x) \equiv (f_0(x))^\delta \qquad (\text{mod } p).$$

Enthielte nämlich $F_0(x)$ auch nur zwei verschiedene Primfaktoren modulo p, so könnte man $F_0(x)$ modulo p in das Produkt von zwei Faktoren so zerlegen, daß

$$(7.) \qquad F_0(x) \equiv \varphi_0(x)\,\psi_0(x) \qquad (\text{mod } p)$$

ist und daß $\varphi_0(x)$ und $\psi_0(x)$ modulo p betrachtet, keinen gemeinsamen Teiler besitzen, daß also ihre Eliminationsresultante $R(\varphi_0(x), \psi_0(x))$ eine Einheit für den Bereich von p ist. Wenn dies aber der Fall ist, so kann man aus der Zerlegung (7.) auf dem oben angegebenen Wege auch eine Zerlegung für den Bereich von p

$$F(x) = \varphi(x)\,\psi(x) \qquad (p)$$

herleiten, wo $\varphi_0(x)$ und $\psi_0(x)$ die ersten Näherungswerte von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind; und dies steht mit der vorausgesetzten Unzerlegbarkeit von $F(x)$ im Widerspruch.

Bemerkungen und Ergänzungen zu der Abhandlung des Herrn *Heffter:* „Zur Klassifikation . . .“

Band 126 dieses Journals, S. 83—98.

(Von Herrn *S. Gundelfinger* in Darmstadt.)

I. Im zweiten Supplement zu *Hesses* analytischer Geometrie des Raumes*) habe ich bei Zugrundelegung allgemeiner projektiver Koordinaten *invariantive* Kriterien für die verschiedenen Flächen zweiter Ordnung und ihre ebenen Schnitte gegeben, die, zusammen mit den dualistischen Kriterien für die Flächen zweiter Klasse, von mir später in eine für die praktische Berechnung geeignetere Form gebracht und nach meinen Vorträgen von meinem ehemaligen Assistenten Herrn *Brückel* verabredetermaßen in diesem Journal, Bd. 119, S. 214—215 veröffentlicht worden sind. Die analogen Kennzeichen für die Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse habe ich in meinen Vorlesungen über Kegelschnitte, herausgegeben von *F. Dingeldey* (Leipzig, 1895)**) gegeben. Sämtliche Kennzeichen meiner Schemata sind nach verschiedenen Abteilungen getrennt, wobei die Formen in einer und derselben Abteilung *gleichen* Ranges***) und außerdem nach algebraischen Invarianten geordnet sind, welche die gerade oder ungerade Anzahl negativer

*) 3. Ausg., Leipzig 1876, S. 462 ff.

**) s. S. 54 ff.

***) Im Anschluß an eine Bezeichnung des Herrn *Frobenius* verstehe ich unter „Rang“ einer quadratischen Form f die kleinste Anzahl Quadrate von linearen und linear unabhängigen homogenen Ausdrücken, durch deren Summe f sich darstellen läßt, *auch in dem Fall, daß zwischen den Veränderlichen von f lineare Beziehungen bestehen.* Über die Bestimmung der Anzahl negativer Quadrate im *zweiten Fall* kann man meine Arbeiten Bd. 91, S. 235 dieses Journals und Arch. d. Math. u. Phys. III, 3, S. 78 ff. vergleichen.

Quadrate bestimmen, die bei der Darstellung der Fläche 2. Ordnung ($f = 0$) und ihres Schnittes mit der unendlich fernen Ebene ($f = 0$, $p_x \equiv X_0 = 0$) durch die kleinste Anzahl Quadrate linearer und linear unabhängiger Quadrate auftreten können (also bei Zugrundelegung eines Poltetraeders, Poltrieders u. s. w.)*.) Sobald für eine quadratische Form

$$\psi = \frac{c_q}{c_{q+1}} x_q^2 + \frac{c_{q+1}}{c_{q+2}} x_{q+1}^2 + \cdots + \frac{c_n}{c_{n+1}} x_n^{2**}) \qquad (c_{n+1} > 0)$$

der Rang $(n-q+1)$ bekannt ist, liefert die Anzahl negativer Quadrate***) (d. h. die Anzahl Zeichenwechsel in der Zahlenkette $c_q, c_{q+1} \ldots c_n, 1$) sofort auch die Signatur. Die Kriterien, welche Herr *Heffter* (teilweise nach Vorgang von Herrn *Hensel*) in Bd. 126, S. 95–98 dieses Journals und ich selbst an den angeführten Stellen gegeben haben, ergänzen sich also in der Art, daß die invariantiven *arithmetischen* Charaktere für jede einzelne Fläche aus den Tabellen der Herren *Hensel* oder *Heffter* und die entsprechenden *invariantiven* algebraischen Bedingungen aus meinen angeführten Arbeiten entnommen werden können. Für die Berechnung der arithmetischen Charaktere sind natürlich die algebraischen Ausdrücke unentbehrlich. So lange es sich um theoretische allgemeinere Untersuchungen handelt, wird man die von mir gegebenen invariantiven Kriterien vorziehen.†) Für *Zahlenbeispiele* führt eine ganze Reihe von Methoden zum Ziele, unter denen die *sukzessive* Abtrennung von 1 oder 2 Quadraten nach der Transformation *Lagranges*††) am besten sich eignen dürfte, welche nach meinen Ausführungen in Bd. 91, S. 215 dieses Journals die Inverse der *Jacobi*schen Transformation ist.

II. Wie Herrn *Heffter*, erscheint auch mir die charakteristische Reihe *Sylvesters* (a. a. O. S. 88) als die weitaus eleganteste, soweit Symmetrie in Betracht kommt. Immerhin möchte ich bemerken, daß *Sylvesters* Reihe die Berechnung *sämtlicher* Hauptunterdeterminanten erfordert, während die *Jacobi*sche

*) s. Note ***) auf voriger Seite.

**) I. Suppl. S. 454 und 459–460.

***) Wenn es sich lediglich um die *Gleichung* $\psi = 0$ vom Range v handelt, kann man die Anzahl negativer Quadrate stets gleich oder kleiner als $\left[\frac{v}{2}\right]$ voraussetzen; wenn nötig, durch Multiplikation der Gleichung $\psi = 0$ mit -1.

†) Ihre Entstehung fällt in die Zeit 1873/74, als mein Freund und damaliger Kollege, Herr *Guido Hauck*, für seine *geometrischen* Untersuchungen nach invariantiven Kennzeichen suchte.

††) *Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten 1874, § 13, 11.

unter Zuziehung der von mir gegebenen Ergänzungen*) nur einer einzigen Kette von Hauptunterdeterminanten bedarf. Vor allem aber gewährt die *Sylvester*sche Reihe keinen Einblick in den von mir aufgestellten allgemeinen Satz über definite Formen.**) Daß ich aus der Reihe $C_0, C_1, \ldots, C_{n+1}$***) die Kette *Sylvester*s herausgelesen habe, dürften meine Entwicklungen in *Hesse*s Raumgeometrie S. 466, Z. 17–1 von unten†) sowie S. 469 Schluß beweisen. Übrigens habe ich schon im Wintersemester 1864/65 bei *Hesse* für *definite* Formen die *Sylvester*sche Regel vorgetragen erhalten und vor längerer Zeit Herrn *Nöther* gelegentlich eines Gesprächs über die *Sylvester*sche Kette mitgeteilt, daß diese Kette sofort aus dem Trägheitsgesetz und der Transformation der quadratischen Form in eine Summe von Quadraten durch orthogonale Substitutionen folge (Math. Ann. 50, 133 Anm. 2.) Ein von mir zuerst aufgestelltes Theorem††) in Suppl. IV zu *Hesse*s Raumgeometrie S. 515–518 gibt auch die Klassifikation der Flächen zweiter *Klasse* durch orthogonale Substitutionen. Man hat nur in meinen Entwicklungen Bd. 119, S. 313–323 dieses Journals für die quadratische Form ω überall $u_1^2+u_2^2+u_3^2$ zu setzen.

III. Daß bei der Berechnung der Anzahl negativer Quadrate für die verschiedenen Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse der Tangentenkomplex des unendlich fernen Schnittes auftritt, zeigen die Formeln auf

---

*) Suppl. I zu *Hesse*s Raumgeometrie S. 461. Bd. 91, S. 225 dieses Journals. Arch. f. Math. und Phys. III. Reihe 2, S. 214—216. Um eine Kette $\Delta_n, \Delta_{n-1}, \ldots, \Delta_2, \Delta_1, 1$ zu bilden, bei der nicht zwei auf einander folgende Glieder verschwinden, wird man nach der Methode *Lagrange*s (*Baltzer* § 13, 11) *sukzessive* ein oder zwei Quadrate abtrennen. Man erhält dann stets eine solche Reihe $1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ in umgekehrter Ordnung.

**) Bd. 91, S. 227 und 235 dieses Journals. Arch. f. Mth. u. Phys. 2, S. 214—216.

***) Diese Reihe ist zuerst von Herrn *Darboux* (November 1874) veröffentlicht worden. Man vergl. die erste Fußnote in Suppl. I, S. 449 a. a. O. Die *Darboux*sche Einführung willkürlicher Parameter war mir schon lange vorher bekannt und z. B. Herrn *L. Kronecker* in einem Briefe vom Mai 1874 mitgeteilt worden.

†) *Daselbst ist auf* S. 66, Z. 5 von unten *nach* Γ_3 *und* (entsprechend S. 467, Z. 1 von oben *nach* Δ_2) *die 1 einzuschieben*, wie ich Seite 459 in der Anm. zu Kette 20 gezeigt habe.

††) Dasselbe habe ich einfacher in meinen Vorlesungen über Kegelschnitte, herausgegeben von *Dingeldey*, S. 65—70, bewiesen; es dehnt einen bekannten Satz von *Weierstraß* auch auf den Fall aus, daß in einer Schar quadratischer Formen sich eine definite mit *verschwindender* Determinante befinde.

Seite 454 und 467–468, sowie die (von mir eingefügte) Entwicklung auf Seite 179 der Raumgeometrie *Hesses*.*)

IV. Die *algebraische* Klassifikation der Schnitte einer Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene ist durch mein Supplement II, S. 467–469 a. a. O. vollständig erledigt. Es hätte keine Schwierigkeit, auf Grund meiner Entwicklungen im Archiv der Math. u. Phys. III, 3, S. 78–80 Rang und Signatur der *ternären* Form $f = 0,\ X_1 = 0$ und der *binären* Form

$$f = 0,\ X_1 = 0,\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = 0$$

zu berechnen. Man muß dabei natürlich zu der Tabelle des Herrn *Heffter* für Kurven 2. Ordnung in der Ebene gelangen.

Nachtrag.

V. In eigentümlicher Zusammenfassung erscheint die Klassifikation der Schnitte von Ebenen mit Flächen 2. Ordnung bei der Berechnung des Invariantenquotienten, welcher bei der Mittelpunktstransformation auftritt, und dessen Zähler den Rang des ebenen Schnittes, während der Nenner den Rang (oder die Signatur) des unendlich fernen Punktpaares auf dem ebenen Schnitte bestimmt. Bei der Beschränkung auf rechtwinklige oder schiefwinklige Koordinaten gestaltet sich diese Berechnung folgendermaßen.

Wenn in homogenen Koordinaten $x:y:z:p$

(1.) $$f(x, y, z, p) \equiv a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + \cdots + a_{33} z^2 + 2a_{14} xp + \cdots + a_{44} p^2 = 0$$

und

(2.) $$ax + by + cz + dp = 0$$

die Gleichungen des ebenen Schnittes sind, so sind die Relationen für die Koordinaten A, B, C seines Mittelpunkts**)

(3.) $$\frac{\frac{1}{2} f'(A)}{a} = \frac{\frac{1}{2} f'(B)}{b} = \frac{\frac{1}{2} f'(C)}{c}$$

und

(4.) $$aA + bB + cC + d \cdot D = 0. \qquad (D=1)$$

---

*) In meinen Kriterien auf S. 213–215 in Bd. 119 dieses Journals tritt der Tangentenkomplex in den Formen auf:

$$f(yy) f(xx) - f^2(yx) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(pp)\varphi(vv) - \varphi^2(pv) = 0.$$

Auf S. 179 a. a. O. fehlt die *Bezeichnung* „Tangentenkomplex“, weil sowohl *Hesse* wie ich selbst die „Komplexe“ prinzipiell ausgeschlossen hatten; a. a. O. S. 494, Z. 3—1 von unten.

**) *Hesse*, Raumgeometrie, 3. Ausg., S. 391—393.

Die Gerade (3.) hat mit der Ebene (4.) entweder einen einzigen Punkt gemein oder liegt ganz in ihr und zwar a) im Endlichen, b) im Unendlichen.*) — In den *beiden* Fällen a) hat die fragliche Invariante $f(A, B, C, 1)$ einen *bestimmten* endlichen Wert K („Konstante der Mittelpunktstransformation“);*) d. h. im Falle einer Mittelpunktsgeraden ist für irgend 2 verschiedene Mittelpunkte A, B, C und A_1, B_1, C_1:

$$f(A, B, C, 1) = f(A_1, B_1, C_1, 1).$$

Nennt man nämlich den gemeinsamen Wert der drei Quotienten in (3.) $-\mu$, so hat man — mit Rücksicht auf

$$f(A, B, C, D) = \frac{1}{2} f'(A) \cdot A + \frac{1}{2} f'(B) \cdot B + \frac{1}{2} f'(C) \cdot C + \frac{1}{2} f'(D) \cdot D$$

— zur Bestimmung der 5 Größen A, B, C, μ und K die 5 Gleichungen

$$(5.) \qquad \begin{cases} a_{11} A + a_{12} B + a_{13} C + a_{14} D + \mu a = 0 \\ a_{21} A + a_{22} B + a_{23} C + a_{24} D + \mu b = 0 \\ a_{31} A + a_{32} B + a_{33} C + a_{34} D + \mu c = 0 \\ a_{41} A + a_{42} B + a_{43} C + a_{44} D + \mu d = K \\ a A + b B + c C + d D + \mu \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $A_1, B_1, C_1, D_1 = 1$ und dem entsprechenden μ_1, so folgt $K_1 = K$. — Zur Berechnung von K betrachtet man in (5.) die mit D bezeichnete Längeneinheit als Unbekannte und findet

$$(6.) \qquad 1 \cdot F = K \cdot \Delta,$$

worin für $A = \Sigma \pm (a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44})$ und $\delta = \Sigma \pm (a_{11}\, a_{22}\, a_{33})$ in bekannter Bezeichnungsweise

$$F = A_{11}\, a^2 + 2 A_{12}\, ab + \cdots + A_{44}\, d^2,$$

$$\Delta = \delta_{11}\, a^2 + 2\, \delta_{12}\, ab + \cdots + \delta_{33}\, c^2;\ \delta_{ik} = \frac{\partial \delta}{\partial a_{ik}}.$$

Die Gleichung (6ª.) $K = \frac{F}{\Delta}$ zeigt, daß bei nicht verschwindendem F**) für $\Delta \neq 0$, ein nicht ausartender Mittelpunktskegelschnitt, dagegen für $\Delta = 0$

*) Man kann hierzu meine Entwicklungen in den Nouvelles Ann. de Math. 1884, S. 7—18 vergleichen.

**) Vergl. dieses Journal, Bd. 119, 216—217.

eine Parabel vorliegt (Rang des Schnittes gleich 3). Ein positives Vorzeichen von Δ bedeutet, daß das unendlich ferne Punktepaar des Schnittes imaginär, ein negatives, daß dieses Punktepaar reell ist; während ein Doppelpunkt bei $\Delta = 0$ vorliegt. („Signaturen“ 2, 0, 1.) Wenn $F = 0$,*) liefert also die Bedingung $\Delta > 0$ das imaginäre,**) $\Delta < 0$ das reelle Geradenpaar.

Wenn $F = 0$ und $\Delta = 0$, zeigt das scheinbare Unbestimmtwerden von $K = f(A, B, C, 1)$ an, daß der Fall einer Mittelpunktsgeraden vorliegt, und daß in (3.) irgend eine der drei ersten Gleichungen durch die Gleichung einer *beliebigen* Ebene:

$$u A + v B + v C + r \cdot D = 0$$

ersetzt werden kann. Man findet so

$$K = \frac{F_{11}}{\Delta_{11}} = \frac{F_{22}}{\Delta_{22}} = \frac{F_{33}}{\Delta_{33}} = \frac{F_{12}}{\Delta_{12}} = \cdots = \frac{F_{31}}{\Delta_{31}},$$

wobei

$$F_{ik} = \frac{\partial F}{\partial a_{ik}} \quad \text{und} \quad \Delta_{ik} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}}.$$

So lange nicht alle drei Größen F_{11}, F_{22}, F_{33} gleichzeitig verschwinden, besteht der Schnitt aus parallelen Geraden, von denen bei $\Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33}$ die eine ins Unendliche gerückt ist. Wenn endlich sämtliche

$$F_{lm} \quad (l, m = 1, 2, 3, 4)$$

verschwinden, aber nicht alle

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_{lm}\, \partial a_{np}} \quad (l, m, n, p = 1, 2, 3, 4),$$

so wird der Schnitt eine Doppelgerade,***) im Endlichen bei $\Delta_{11} \cdot \Delta_{22} \cdot \Delta_{32} \neq 0$, dagegen im Unendlichen, wenn außer $\Delta = 0$ auch $\Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33} = 0$. Das Verschwinden sämtlicher Subdeterminanten $\frac{\partial^2 F}{a_{lm}\, a_{np}}$ zeigt an,***) daß die gegebene Ebene einen Teil der Fläche bildet.

Die hier gegebene Klassifikation geht genau aus der von mir in Suppl. II aufgestellten für $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = 1$ hervor.

---

*) Beweis in diesem Journal, Bd. 119, S. 216—217 auf Grund geometrischer Betrachtungen.

**) Wie beim imaginären Ellipsoid, sind auch für die imaginäre Ellipse die Kriterien ($F \neq 0$) vom Verhalten zur unendlich fernen Ebene unabhängig.

***) Vergl. a. a. O. S. 217.

VI. Herr *Heffter* benutzt beim Beweis der *Sylvester*schen Reihe Entwicklungen des Herrn *Netto*, die im wesentlichen auf dem bekannten Satz beruhen, daß eine Gleichung $f(\lambda) = 0$ mit lauter reellen Wurzeln genau so viele positive Wurzeln besitzt, als Zeichenwechsel in $f(\lambda)$ sind. Es scheint nicht bekannt zu sein, daß der wohl einfachste Beweis dieses Theorems in einem Zusatz von *Gauß* zum *Harriot-Cartesi*schen Theorem enthalten ist. (Dieses Journal Bd. 3, 4; *Gauß'* Werke Bd. 3, S. 70.)

Nennen wir, um die Entwicklung von *Gauß* in Kürze zu wiederholen, A und B die Anzahl der *unmittelbaren* Zeichenwechsel und Zeichenfolgen, a und b die Anzahl der durch eine *gerade* Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel und Zeichenfolgen, c und d dagegen die Anzahl der durch eine *ungerade* Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel und Zeichenfolgen in der gegebenen Gleichung (m-ten Grades), so ist

$$m-A-B-a-b-c-d = e,$$

worin e die Anzahl sämtlicher fehlenden Glieder. Nach dem Theorem von *Harriot* ist die Anzahl der positiven Wurzeln höchstens $A+a+c$, die Anzahl der negativen Wurzeln höchstens $B+b+c$, also die Anzahl aller reellen Wurzeln höchstens $A+B+a+b+2c = m+c-d-e = m-(e-c+d)$. Nach *Gauß* in Worten:

Die Anzahl der imaginären Wurzeln ist mindestens $e-c+d$.

Hat daher eine Gleichung lauter reelle Wurzeln, so ist $c = e+d$, also im Hinblick auf die Bedeutung von e

$$d = 0 \quad \text{und} \quad e = c, \quad \text{also auch} \quad b = 0 \quad \text{und} \quad a = 0.$$

Eine derartige Gleichung hat also nur unmittelbare Zeichenfolgen und nur solche Zeichenwechsel, bei denen zwischen 2 Termen höchstens *ein* Glied fehlt. Überdies wird jetzt mit Rücksicht auf

$$(A+c)+(B+c) = m$$

die Anzahl positiver Wurzeln gleich $A+c$, gleich der Anzahl der vorhandenen Zeichenwechsel, die Anzahl negativer Wurzeln gleich $B+e$.

Der *Gauß*sche Zusatz liefert analoge Korollare, wenn $e-c+d = 2, 4, \ldots$ wird.

Eine Anwendung des *Eisenstein*schen Satzes auf die Theorie der *Gauss*schen Differentialgleichung.

(Von Herrn *Edmund Landau* in Berlin.)

Man verdankt *Eisenstein* einen der wenigen Sätze, welche gestatten, aus der arithmetischen Natur der Koeffizienten einer gegebenen Potenzreihe Schlüsse auf die analytische Natur der durch sie dargestellten Funktion zu ziehen.

Der *Eisenstein*sche Satz*) gibt eine notwendige Bedingung dafür an, daß eine Potenzreihe

$$(1.) \qquad y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

mit rationalen Zahlenkoeffizienten c_n einer algebraischen Gleichung

$$(2.) \qquad f(x, y) = \sum_{r=0}^{\varrho} \sum_{s=0}^{\sigma} a_{rs} x^r y^s = 0$$

*) „Über eine allgemeine Eigenschaft der Reihen-Entwicklungen aller algebraischen Funktionen“, Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1852, S. 441—443. *Eisenstein* bemerkt, der Satz sei durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten nicht schwer zu erweisen; er hat aber die nähere Ausführung nicht mehr veröffentlicht. Ein Beweis wurde zuerst von *Heine* mitgeteilt, und zwar in der Arbeit „Über die Entwicklung von Wurzeln algebraischer Gleichungen in Potenzreihen“, dieses Journal, Bd. 48, 1854, S. 267 bis 275; vergl. auch sein „Handbuch der Kugelfunktionen“, 2. Aufl., Bd. 1, 1878, S. 50 bis 52. Ein zweiter Beweis rührt von *Hermite* her, vergl. „Sur un théorème d'*Eisenstein*“, Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 7, 1876, S. 173—175 und „Cours de la faculté des sciences“, 4. Aufl., 1891, S. 195—197. Ein dritter Beweis findet sich bei Herrn *Suták*, „Ein neuer Beweis eines *Eisenstein*schen Satzes“, mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 12, 1894, S. 1—10.

mit rationalen Zahlenkoeffizienten a_{rs} genügt. Er sagt aus: Wenn die Reihe (1.) einer Gleichung von der Gestalt (2.) genügt, so gibt es eine ganze Zahl k derart, daß die Koeffizienten aller Potenzen von z in der durch die Substitution $x = kz$ aus (1.) hervorgehenden Reihe

$$y = c_0 + c_1 k \cdot z + c_2 k^2 \cdot z^2 + \cdots + c_n k^n \cdot z^n + \cdots,$$

d. h. $c_1 k$, $c_2 k^2$, ..., $c_n k^n$, ... ganze Zahlen sind.

Daraus folgt insbesondere,*) daß die c_n, in reduzierter Form geschrieben, nur endlich viele verschiedene Primzahlen in den Nennern enthalten können. Es gibt also eine Schranke N, so daß kein Nenner eines (in reduzierter Form geschriebenen) c_n durch eine Primzahl $> N$ teilbar ist.

*Heine***) hat zum *Eisenstein*schen Satz eine Ergänzung hinzugefügt, welche leicht beweisbar ist, aber jedenfalls von *Eisenstein* noch nicht ausgesprochen war. *Heine* zeigte: Wenn eine Potenzreihe (1.) mit rationalen Zahlenkoeffizienten einer algebraischen Gleichung

$$g(x, y) = \sum_{r=0}^{\varrho} \sum_{s=0}^{\sigma} \gamma_{rs} x^r y^s = 0$$

mit beliebigen, nicht notwendig rationalen Zahlenkoeffizienten γ_{rs} genügt, so befriedigt sie auch eine Gleichung der Form (2.) mit rationalen Zahlenkoeffizienten. Daraus durfte dann *Heine* schließen: Das *Eisenstein*sche Kriterium liefert eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Potenzreihe mit rationalen Zahlenkoeffizienten Element einer algebraischen Funktion ist.

Von diesem Satze scheint noch keine Anwendung bei Problemen gemacht worden zu sein, in denen ermittelt werden soll, wann Transzendenten gewisser Art, insbesondere durch Differentialgleichungen definierte Funktionen in algebraische Funktionen degenerieren. Der Zweck der folgen-

---

*) Diesen Spezialfall hatte *Heine* schon in der Abhandlung bewiesen: „Der *Eisenstein*sche Satz über Reihen-Entwicklung algebraischer Funktionen", dieses Journal, Bd. 45, 1853, S. 285—302. Einen Beweis des Spezialfalles siehe auch bei Herrn *Teixeira*, „Sur le théorème d'*Eisenstein*", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 3, Bd. 3, 1886, S. 389—390 und „Über den *Eisenstein*schen Satz", Archiv der Mathematik und Physik, Ser. 2, Bd. 3, 1886, S. 315—317.

**) Vergl. die auf S. 92 zitierte Abhandlung, S. 269—271, und das „Handbuch", S. 52—53.

den Untersuchungen ist, eine solche Anwendung durchzuführen. Ich werde zeigen, daß es möglich ist, den *Eisenstein*schen Satz mit dem Problem in Verbindung zu bringen, welches zuerst von Herrn *Schwarz* in seiner bekannten Arbeit*) gelöst worden ist: „Über diejenigen Fälle, in welchen die *Gauß*sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt".

Die folgende Untersuchung dürfte schon mit Rücksicht auf die von *Eisenstein***) gemachte, aber nicht mehr ausgeführte***) Ankündigung von Interesse sein: „Die wichtigsten Anwendungen der so erhaltenen Sätze habe ich auf Fälle gemacht, in denen die algebraischen Funktionen als Integrale von Differentialgleichungen definiert werden, und diese Differentialgleichungen für einfache Reihenentwicklung geeignet sind, während die vielleicht sehr komplizierte Darstellung in endlicher Form ganz unbekannt bleibt und für diesen Zweck auch wirklich ganz aus dem Spiele gelassen werden kann. Das Einzelne der hierauf bezüglichen Untersuchungen mag für eine künftige Mitteilung vorbehalten bleiben."

Die Entwicklung der Theorie der automorphen Funktionen hat gezeigt, daß die Bedeutung der *Schwarz*schen Arbeit nicht nur in der Ermittlung derjenigen Fälle besteht, in denen die hypergeometrische Funktion algebraisch ist, sondern namentlich in dem dort ausgeführten Studium des allgemeinen Falles, daß sie transzendent ist. Wenn dagegen im Folgenden auf direktem Wege — d. h. ohne Benutzung des *Schwarz*schen Hilfsmittels der Kreisbogendreiecke oder der von späteren Autoren†) herangezogenen Hilfsmittel — der Transzendenzbeweis in einer umfassenden Klasse von Fällen geführt wird, so beansprucht die dabei angewendete Methode nicht,

*) Dieses Journal, Bd. 75, 1873, S. 292—335; gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 2, 1890, S. 211—259.

**) a. a. O., S. 442.

***) *Eisenstein* starb bald nach dem Erscheinen seiner Mitteilung.

†) Vergl. insbesondere *Fuchs*, „Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie", dieses Journal, Bd. 81, 1876, S. 136; *Klein*, „Über lineare Differentialgleichungen", Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen, Heft 8, 1876, S. 182—186; *Goursat*, „Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique", Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Ser. 2, Bd. 10, 1881, Suppl., S. 46—65.

mehr als den bloßen Transzendenzbeweis zu liefern. Es ist jedenfalls bemerkenswert, daß das vorliegende funktionentheoretische Problem, welches ja bekanntlich mit den verschiedensten geometrischen, analytischen und algebraischen Sätzen in Zusammenhang gebracht werden kann, auch zur Anwendung eines rein zahlentheoretischen Satzes Anlaß gibt, wie*) des Satzes vom Vorhandensein unendlich vieler Primzahlen in der arithmetischen Progression $tm+1$.

Ich mache im Folgenden von zwei Tatsachen Gebrauch, welche sehr leicht festgestellt werden können und z. B. von Herrn *Schwarz* bei Beginn seiner Untersuchung begründet werden:

I.**) Wenn keine der vier Größen $\alpha, \beta, \gamma-\alpha$ und $\gamma-\beta$ eine ganze rationale Zahl ist, so ist entweder das allgemeine Integral der *Gauß*schen Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

algebraisch, oder es ist kein partikuläres Integral derselben algebraisch.

II.***) Wenn das allgemeine Integral der *Gauß*schen Differentialgleichung algebraisch ist, so sind α, β und γ rational.

Wenn also keine der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma-\alpha$ und $\gamma-\beta$ ganz ist und die Reihe

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\quad\dots\quad n\quad\cdot\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}x^n$$

algebraisch ist, so hat sie rationale Zahlenkoeffizienten.

Ich werde nun zeigen, daß sich aus dem *Eisenstein-Heine*schen Satz der Transzendenzbeweis in dem einen der beiden *Schwarz*schen Hauptfälle direkt herleiten läßt, und zwar in dem Fall, welcher unter Anwendung der a. a. O. angestellten Untersuchungen über die konforme Abbildung der Kreisbogendreiecke so definiert†) ist: Die Winkelsumme des reduzierten

---

*) Siehe unten, S. 98.

**) a. a. O., S. 293—294 bezw. 213—214.

***) a. a. O., S. 297—298 bezw. 217—218.

†) a. a. O., S. 317 ff. bezw. 239 ff.

Kreisbogendreiecks ist kleiner als π. Ohne Bezugnahme auf jene Theorie erklärt, bedeutet diese Voraussetzung:*)

Es werde

$$|1-\gamma| = \lambda, \quad |\alpha-\beta| = \mu, \quad |\gamma-\alpha-\beta| = \nu$$

gesetzt und es werde angenommen, daß keine der — reellen — Zahlen

$$\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma-\alpha, \gamma-\beta$$

ganz ist. Es seien λ', μ', ν' die absoluten Beträge der modulo 2 absolut kleinsten Reste von λ, μ, ν; es bedeute λ'', μ'', ν'' dasjenige der vier Wertsysteme

$$\begin{array}{ccc} \lambda' & , \quad \mu' & , \quad \nu' \\ \lambda' & , \; 1-\mu', & 1-\nu' \\ 1-\lambda', & \mu' & , \; 1-\nu' \\ 1-\lambda', & 1-\mu', & \nu' \end{array};$$

welches die kleinste Summe hat. Dieses System möge so beschaffen sein, daß

$$\lambda''+\mu''+\nu'' < 1 \tag{3.}$$

ist.

Ich werde nun im Folgenden mit Hilfe des *Eisenstein-Heine*schen Satzes beweisen, daß unter diesen Annahmen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ Element einer transzendenten Funktion ist.

§ 1.

Gesetzt, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sei algebraisch, während keine der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma-\alpha, \gamma-\beta$ ganz ist; dann sind nach I. und II. α, β und γ rational; es möge $m>0$ ein gemeinsames Vielfaches der Nenner von α, β, γ sein und

$$\alpha = \frac{a}{m}, \; \beta = \frac{b}{m}, \; \gamma = \frac{c}{m};$$

dann ist keine der ganzen Zahlen a, b und c durch m teilbar, falls auch $\lambda = |1-\gamma|$ als nicht ganz vorausgesetzt wird. In

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ist dann

*) a. a. O., S. 301, 312, 314 und 221, 234, 236.

$$c_{n+1} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{1\cdot 2\quad\dots(1+n)\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)}$$

$$= \frac{\frac{a}{m}\left(\frac{a}{m}+1\right)\dots\left(\frac{a}{m}+n\right)\frac{b}{m}\left(\frac{b}{m}+1\right)\dots\left(\frac{b}{m}+n\right)}{1\cdot 2\quad\dots(1+n)\quad\frac{c}{m}\left(\frac{c}{m}+1\right)\dots\left(\frac{c}{m}+n\right)}$$

$$= \frac{a(a+m)\dots(a+nm)\,b(b+m)\dots(b+nm)}{m\cdot 2m\;\dots(m+nm)\cdot c(c+m)\dots(c+nm)}.$$

Da $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ algebraisch ist, so ist nach dem *Eisenstein-Heine*schen Satze in seiner speziellen Fassung*) jede Primzahl p oberhalb einer gewissen Schranke N so beschaffen, daß sie den Zähler

$$a(a+m)\dots(a+nm)\,b(b+m)\dots(b+nm)$$

jedes c_{n+1} mindestens so oft teilt als den zugehörigen Nenner

$$m\cdot 2m\;\dots(m+nm)\,c(c+m)\dots(c+nm).$$

Ich nehme — aus nachher ersichtlichen Gründen — N oberhalb der vier Zahlen m, $2|a|$, $2|b|$, $2|c|$ gewählt an, was erlaubt ist.

Aus dem Vorigen folgt insbesondere: Wenn p eine Primzahl $>N$ und

$$c+nm \equiv 0 \pmod{p}$$

ist, so ist mindestens eine der beiden Kongruenzen

$$a(a+m)(a+2m)\dots(a+nm) \equiv 0 \pmod{p}$$

und

$$b(b+m)(b+2m)\dots(b+nm) \equiv 0 \pmod{p}$$

erfüllt; mit anderen Worten: Wenn x_0 die kleinste positive Wurzel der (wegen $p>N>m$ lösbaren und wegen $p>N>2|a|>|a|$ nicht die Wurzel 0 besitzenden) Kongruenz

$$a+xm \equiv 0 \pmod{p} \tag{4.}$$

und ebenso y_0 die kleinste positive Wurzel der Kongruenz

$$b+ym \equiv 0 \pmod{p} \tag{5.}$$

bezeichnet, so ist mindestens eine der beiden Ungleichheitsbedingungen

$$x_0 \leqq n,\quad y_0 \leqq n$$

erfüllt.

*) Vergl. oben, S. 93.

Daraus folgt: Ist p eine Primzahl $>N$ und sind x_0, y_0 und z_0 die kleinsten positiven Wurzeln der Kongruenzen (4.), (5.) und

$$(6.) \qquad c+zm \equiv 0 \pmod{p},$$

so besteht mindestens eine der beiden Ungleichheitsbedingungen

$$x_0 \leqq z_0, \quad y_0 \leqq z_0.$$

§ 2.

Nun gibt es bekanntlich unendlich viele Primzahlen der Form $tm+1$; dieser Spezialfall des *Dirichlet*schen Satzes über die arithmetische Progression ist nach *Serret**) sogar mit elementaren Mitteln beweisbar. Also gibt es oberhalb N eine Primzahl

$$p = t_0 m + 1;$$

auf diese werde das in § 1 gefundene Resultat angewendet.

Es können zunächst die durch die Kongruenzen (4.), (5.) und (6.) eindeutig bestimmten Zahlen x_0, y_0 und z_0 durch p ausgedrückt werden. Es genügt offenbar die Zahl $x = at_0$ der Kongruenz (4.), da

$$a + at_0 \cdot m = a(1+t_0 m) = ap \equiv 0 \pmod{p}$$

ist. Also ist x_0 der kleinste positive Rest von

$$at_0 = a\,\frac{p-1}{m}$$

modulo p. Es bezeichne a_0 (bezw. nachher b_0 und c_0) den kleinsten positiven Rest von a (bezw. b und c) modulo m, so daß also

$$1 \leqq a_0 \leqq m-1$$

ist, und es werde die ganze Zahl

$$\frac{a-a_0}{m} = A$$

gesetzt; dann ist

$$a\frac{p-1}{m} = a\frac{p}{m} - \frac{a}{m} = (a_0+mA)\frac{p}{m} - \frac{a}{m} = a_0\frac{p}{m} - \frac{a}{m} + pA \equiv a_0\frac{p}{m} - \frac{a}{m} \pmod{p}.$$

---

*) „Note sur un théorème de la théorie des nombres", Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 1, Bd. 17, 1852, S. 186—189.

Nun ist die rechte Seite dieser Kongruenz zwischen 0 und p gelegen, stellt also die gesuchte Zahl x_0 dar; in der Tat ist wegen $p > N > 2|a| > |a|$

$$a_0\frac{p}{m}-\frac{a}{m}\leqq(m-1)\frac{p}{m}+\frac{|a|}{m}=p-\frac{p-|a|}{m}<p$$

und

$$a_0\frac{p}{m}-\frac{a}{m}\geqq\frac{p}{m}-\frac{|a|}{m}=\frac{p-|a|}{m}>0.$$

Es ist also

$$x_0=a_0\frac{p}{m}-\frac{a}{m} \tag{7.}$$

und ebenso

$$y_0=b_0\frac{p}{m}-\frac{b}{m}, \tag{8.}$$

$$z_0=c_0\frac{p}{m}-\frac{c}{m}. \tag{9.}$$

Es mußte nun wenigstens eine der beiden Bedingungen

$$x_0\leqq z_0,\ y_0\leqq z_0$$

erfüllt sein; daraus folgt mit Hilfe der Ausdrücke (7.), (8.) und (9.), daß mindestens eine der beiden Ungleichheitsbedingungen

$$a_0\leqq c_0,\ b_0\leqq c_0$$

besteht; denn wäre zugleich

$$a_0>c_0,\ b_0>c_0,$$

so wäre wegen

$$\frac{p}{2m}>\frac{N}{2m}>\frac{|a|}{m},\ \frac{p}{2m}>\frac{|b|}{m},\ \frac{p}{2m}>\frac{|c|}{m}:$$

$$x_0-z_0=(a_0-c_0)\frac{p}{m}-\frac{a}{m}+\frac{c}{m}\geqq\frac{p}{m}-\frac{|a|}{m}-\frac{|c|}{m}>\frac{p}{m}-\frac{p}{2m}-\frac{p}{2m}=0$$

und

$$y_0-z_0=(b_0-c_0)\frac{p}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\geqq\frac{p}{m}-\frac{|b|}{m}-\frac{|c|}{m}>\frac{p}{m}-\frac{p}{2m}-\frac{p}{2m}=0.$$

Also ist von den beiden Zahlen a_0 und b_0 mindestens eine $\leqq c_0$. Das Gleichheitszeichen ist hier ausgeschlossen, da nach Voraussetzung weder $\gamma-\alpha$ noch $\gamma-\beta$ ganz ist; daher ist mindestens eine der beiden Zahlen a_0 und b_0 unterhalb c_0 gelegen; wegen der Symmetrie der *Gauß*schen Differentialgleichung in α und β kann angenommen werden, daß etwa $b_0<c_0$ ist.

§ 3.

Da nach I. auch das allgemeine Integral der *Gauß*schen Differentialgleichung algebraisch ist, so ist auch das zweite Integral des zu $x = 0$ gehörigen kanonischen Fundamentalsystems, nämlich

$$x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$$

algebraisch, also auch $F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma, x)$, und das in § 2 Gefundene kann auf diese hypergeometrische Reihe angewendet werden. Es ist, wenn

$$\alpha+1-\gamma = \alpha',\ \beta+1-\gamma = \beta',\ 2-\gamma = \gamma'$$

gesetzt wird, keine der vier Zahlen $\alpha', \beta', \gamma'-\alpha'$ und $\gamma'-\beta'$ ganz; es ist nämlich

$$\alpha' = 1+\frac{a-c}{m},\ \beta' = 1+\frac{b-c}{m},\ \gamma' = 2+\frac{-c}{m}.$$

Wird nun analog wie oben

$$\alpha' = \frac{a'}{m},\ \beta' = \frac{b'}{m},\ \gamma' = \frac{c'}{m}$$

gesetzt und werden unter a_0', b_0', c_0' die kleinsten positiven Reste von a', b', c' modulo m verstanden, so ist

$$a' = m+a-c,\ b' = m+b-c,\ c' = 2m-c$$

und

$$(10.)\quad a_0' = \begin{cases} a_0-c_0 \text{ für } a_0>c_0 \\ m+a_0-c_0 \text{ für } a_0<c_0, \end{cases} \quad b_0' = m+b_0-c_0,\ c_0' = m-c_0.$$

Die Anwendung des in § 2 gefundenen Resultates auf die neue hypergeometrische Reihe $F(\alpha', \beta', \gamma', x)$ ergibt: Es besteht mindestens eine der beiden Ungleichheitsbedingungen

$$a_0'<c_0',\ b_0'<c_0'.$$

Da nun

$$b_0' = m+b_0-c_0>m-c_0 = c_0'$$

und

$$m+a_0-c_0>m-c_0 = c_0'$$

ist, so muß a_0' den ersten der beiden in (10.) möglichen Werte haben, d. h. es muß $a_0>c_0$ sein.

Folglich ist

$$b_0 < c_0 < a_0$$

und daher

$$\frac{b_0}{m} < \frac{c_0}{m} < \frac{a_0}{m}.$$

Diese drei Brüche stellen nun die kleinsten positiven Reste $\beta_0, \gamma_0, \alpha_0$ der rationalen Zahlen

$$\beta = \frac{b}{m}, \quad \gamma = \frac{c}{m}, \quad \alpha = \frac{a}{m}$$

modulo 1 dar, und es hat sich also ergeben, daß

$$\beta_0 < \gamma_0 < \alpha_0$$

ist.

§ 4.

Wird

$$\alpha = A + \alpha_0, \ \beta = B + \beta_0, \ \gamma = C + \gamma_0$$

gesetzt, wo also A, B, C ganze Zahlen sind und

$$0 < \beta_0 < \gamma_0 < \alpha_0 < 1 \tag{11.}$$

ist, so ist nach der Definition der Zahlen λ, μ, ν

$$\lambda = |1 - C - \gamma_0|, \ \mu = |A - B + \alpha_0 - \beta_0|, \ \nu = |C - A - B + \gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0|.$$

Um die Zahlen λ', μ', ν' (modulo 2 absolut kleinste Reste von λ, μ, ν) daraus herzuleiten, sind vier Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{cases} C \equiv 0, \ A - B \equiv 0 \pmod 2; \\ C \equiv 0, \ A - B \equiv 1 \pmod 2; \\ C \equiv 1, \ A - B \equiv 0 \pmod 2; \\ C \equiv 1, \ A - B \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

In diesen vier Fällen ist beziehlich λ', μ', ν' gleich dem System

$$\begin{cases} 1-\gamma_0, & \alpha_0-\beta_0, & \alpha_0-\gamma_0+\beta_0; \\ 1-\gamma_0, & 1-\alpha_0+\beta_0, & 1-\alpha_0+\gamma_0-\beta_0; \\ \gamma_0, & \alpha_0-\beta_0, & 1-\alpha_0+\gamma_0-\beta_0; \\ \gamma_0, & 1-\alpha_0+\beta_0, & \alpha_0-\gamma_0+\beta_0. \end{cases} \tag{12.}$$

Das System λ'', μ'', ν'' entsteht aus λ', μ', ν', indem keine oder zwei der Zahlen λ', μ', ν' durch ihre Komplemente zu 1 ersetzt werden; da im obigen Schema (12.) durch jene Transformation aus jeder Zeile gerade die drei anderen hervorgehen, ist λ'', μ'', ν'' jedenfalls eines der vier Systeme, welche sich für λ', μ', ν' ergeben hatten.

Also ist, wie man durch Addition der entsprechenden Größen erhält,

$$\lambda''+\mu''+\nu'' \begin{cases} = 1+2(\alpha_0-\gamma_0) \text{ oder} \\ = 3-2\alpha_0 = 1+2(1-\alpha_0) \text{ oder} \\ = 1+2(\gamma_0-\beta_0) \text{ oder} \\ = 1+2\beta_0; \end{cases}$$

in jedem dieser vier Fälle ist nach (11.)

$$\lambda''+\mu''+\nu''>1.$$

Wenn also, wie in der Einleitung angenommen wurde,

$$\lambda''+\mu''+\nu''<1 \tag{3.}$$

ist, so ist $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ Element einer transzendenten Funktion, was zu beweisen war.

Über die Transformation algebraischer Körper vom Range Eins.

(Von Herrn *Heinrich Jung* in Marburg a. d. L.)

Im Folgenden soll die Transformation der elliptischen Funktionen von algebraischem Standpunkte behandelt werden. Der Gedankengang ist folgender. Wenn man zu einem algebraischen Körper einer Variabeln eine neue algebraische Größe adjungiert, so erhält man im allgemeinen einen Körper von höherem Range. Nur in dem Falle, wo der ursprüngliche Körper vom Range Null oder Eins ist, kann der neue Körper vom gleichen Range sein. Dies wird im ersten Paragraphen bewiesen. Dann wird der Fall, wo der ursprüngliche und der neue Körper vom Range Eins sind, genauer untersucht und zwar durch Anwendung der *Galois*schen Theorie auf die Gleichung, der die zu adjungierende Größe genügt. Es wird gezeigt, daß die *Jacobi*sche Transformation die allgemeinste Transformation darstellt.

Wenn ich nun auch keine neuen Resultate bringen kann, so rechtfertigt vielleicht die Art der Behandlung diese Arbeit.

§ 1.

Es sei durch eine Gleichung $G(y, x) = 0$ ein algebraischer Körper vom Range ϱ definiert. Die Gleichung sei in y vom Grade n. Ferner bedeute $(\alpha - 1)$ die Ordnung irgend eines Verzweigungspunktes und es sei

$$w = \Sigma (\alpha - 1),$$

wo die Summe über alle Verzweigungspunkte zu erstrecken ist. Dann ist

$$\varrho = \frac{w}{2} - n + 1. \tag{1.}$$

Es werde nun durch die Gleichungen

$$x = R(\xi, \eta), \quad y = R_1(\xi, \eta),$$

in denen R und R_1 rationale Funktionen ihrer Argumente bedeuten, ein algebraischer Körper K_1 von ξ und η definiert. Dieser kann mit K identisch sein, kann aber auch ein Körper über K sein. Wir fragen, wann ist K_1 von demselben Range wie K, ohne mit K identisch zu sein? Da wir jede rationale Funktion von ξ, η als unabhängige Variable in K_1 nehmen dürfen, können wir x als solche nehmen. Es sei dann η so gewählt, daß K_1 aus allen rationalen Funktionen von η und x besteht und daß also auch y gleich einer rationalen Funktion von x und η wird,

$$y = R(x, \eta). \tag{2.}$$

η wird einer Gleichung möglichst niedrigen Grades genügen, deren Koeffizienten rationale Funktionen von K sind. Diese Gleichung sei vom Grade ν in η. Enthalten die Koeffizienten der (irreduktiblen) Gleichung y wirklich (was wir annehmen), so genügt η einer Gleichung $n \cdot \nu$-ten Grades, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x sind.

Es sei irgend eine Stelle $x = a$ ein α-facher Verzweigungspunkt von y, wobei nicht ausgeschlossen sein soll, daß α gleich 1 ist. Dieser Stelle mögen ein β_1-, ein β_2-, ... facher Verzweigungspunkt von η entsprechen; es sind dann jedenfalls die Zahlen β durch α teilbar, weil ja sonst aus der Gleichung (2.) folgen würde, daß y an der Stelle $x = a$ keinen α-fachen Verzweigungspunkt haben könnte. Es sei

$$\beta_1 = \alpha_1 \alpha, \quad \beta_2 = \alpha_2 \alpha, \ldots .$$

Dann ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots = \nu$, da jeder Stelle in K ν Stellen in K_1 entsprechen. Ferner wird

$$\begin{aligned} \beta_1 - 1 + \beta_2 - 1 + \cdots &= \alpha_1(\alpha - 1) + \alpha_2(\alpha - 1) + \cdots \\ &\quad + \alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \cdots \\ &= \nu(\alpha - 1) + \alpha_1 - 1 + \alpha_2 - 1 + \cdots . \end{aligned}$$

Setzen wir demnach, wenn $\beta - 1$ die Ordnung irgend eines Verzweigungspunktes von η bedeutet,

$$w_1 = \Sigma(\beta - 1)$$

und ferner, wenn α' angibt, wieviel mehrfach ein Verzweigungspunkt von η ist, als es der entsprechende Punkt für y ist,

$$\overline{w} = \Sigma(\alpha'-1),$$

wo also $\alpha'-1$ gewissermaßen die Ordnung eines Verzweigungspunktes von η innerhalb des Körpers $K(x, y)$ angibt, so wird

$$w_1 = \nu\,\Sigma(\alpha-1)+\overline{w} = \nu w+\overline{w}.$$

Bezeichnen wir den Rang von K_1 mit ϱ_1, so ist demnach

$$\varrho_1 = \frac{w_1}{2}-n\nu+1 = \nu\left(\frac{w}{2}-n+1\right)+\frac{\overline{w}}{2}-\nu+1$$

und nach (1.)

$$\varrho_1 = \nu\varrho+\frac{\overline{w}}{2}-\nu+1. \tag{3.}$$

Diese Formel gilt auch noch, wenn $\varrho = 0$ ist. Die Gleichung (3.) läßt sich schreiben

$$\varrho_1 = \varrho+(\nu-1)\,\varrho+\frac{\overline{w}}{2}-\nu+1 = \varrho+\overline{\varrho},$$

und man könnte wohl den Ausdruck $(\nu-1)\,\varrho+\frac{\overline{w}}{2}-\nu+1 = \overline{\varrho}$ das Geschlecht des Körpers K_1 in bezug auf K nennen. $\overline{\varrho}$ ist natürlich gerade so wie ϱ_1 und ϱ allen birationalen Transformationen gegenüber invariant. Außerdem ist $\overline{\varrho}$ nie negativ, da ja ϱ_1 mindestens gleich ϱ sein muß.

Soll nun $\varrho_1 = \varrho$ sein, so muß $\overline{\varrho} = 0$ sein; das gibt

$$(\nu-1)\,(\varrho-1) = -\frac{\overline{w}}{2}.$$

Da ϱ und $\overline{w}$ ihrer Bedeutung nach nicht negativ sein können und da ferner $\nu>1$ sein muß, wenn nicht K_1 mit K identisch sein soll, so folgt entweder

$$\varrho = 0 \qquad \overline{w} = 2\,(\nu-1)$$

oder

$$\varrho = 1 \qquad \overline{w} = 0.$$

*Daraus folgt, daß ein algebraischer Körper von höherem als dem ersten Range nie einen Körper von gleichem Range über sich oder unter sich haben kann.**) Das ist auch nicht anders zu erwarten. Denn der Trans-

*) Siehe *H. Weber,* dieses Journal, Bd. 76, S. 345—348, *Hurwitz,* Math. Ann. 39.

formation von *Abel*schen Funktionen mehrerer Variabeln entspricht ja auch eigentlich die Transformation von Körpern mehrerer unabhängiger Variabeln.

§ 2.

Wir betrachten den Fall $\varrho = 1$ genauer. Da es gleichgültig ist, welche Variabeln wir zur Darstellung von K nehmen, wenn sie nur überhaupt K darstellen, so können wir die K definierende Gleichung in der Form annehmen

$$y^2 = R(x) = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4).$$

Es werde ferner die Größe η definiert durch eine in K irreduktible Gleichung $G = 0$ n-ten Grades mit rationalen Koeffizienten in K. Dann genügt η auch einer irreduktiblen Gleichung $2n$-ten Grades $H = 0$ mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten. Die Zahl n heiße Transformationsgrad. Da y in der Gleichung für η nur linear vorkommt, so ist sicher y in $K_1(\eta, x)$ enthalten, also K_1 sicher ein Körper über $K(y, x)$.

Soll K_1 vom Range 1 sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, wie wir im vorigen Paragraphen bewiesen, daß η an den Stellen $e_\alpha (\alpha = 1, \ldots, 4)$ und nur an diesen Verzweigungspunkte erster Ordnung hat. Es müssen aber alle $2n$ Wurzeln der Gleichung $H = 0$ an diesen Stellen verzweigt sein. Die Funktion η hat dann für jeden der vier Werte $x = e_\alpha$ n Verzweigungspunkte erster Ordnung, sodaß die Verzweigungszahl von η gleich $4n$ ist und das Geschlecht von K_1, wie es sein muß, gleich $\frac{1}{2}4n-2n+1 = 1$.

Wir gehen dazu über, die *Galois*sche Gruppe der Gleichung $H = 0$ aufzustellen. Dabei betrachten wir alle rationalen Funktionen von x als rationale Größen.

Es sei λ_i eine Schleife in der x-Ebene, die, ohne sich selbst zu schneiden, von irgend einem Punkte P ausgehend und wieder in ihm endigend, den Punkt e_i einmal in positivem Sinne umkreist. $(i = 1, \ldots, 4)$. Wir können die Schleifen so annehmen, daß einem Durchlaufen aller in der Reihenfolge 1, 2, 3, 4 ein einmaliges Umkreisen aller vier Punkte e_i entspricht. Wir denken uns nun die $2n$ Werte, die η im Punkte P hat, in irgend einer Reihenfolge mit $\eta_1, \ldots, \eta_{2n}$ bezeichnet. Setzen wir diese verschiedenen Funktionen längs λ_1 fort bis wieder nach P, so wird eine gewisse Permutation unter ihnen eingetreten sein. Diese bezeichnen wir mit A. Ebenso bezeichnen wir die Permutationen, die eintreten, wenn wir mit denselben An-

fangswerten von P ausgehend, die Wege $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ beschreiben, mit B, C, D. Aus der Art des Verhaltens der Größen η an den Punkten e_i folgt, daß

$$A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = (1),$$

woraus auch folgt

$$A^{-1} = A, \quad B^{-1} = B, \quad C^{-1} = C, \quad D^{-1} = D.$$

Nun können wir irgend einen geschlossenen Weg γ in der x-Ebene aus der Reihe nach durchlaufenen Wegen λ_i zusammensetzen. Die dabei unter den η entstehende Permutation erhalten wir dadurch, daß wir die Permutationen A, B, C, D in derselben Reihenfolge zusammensetzen wie die ihnen entsprechenden Wege λ_i. Also: Die Gruppe der Permutationen, die aus den Permutationen A, B, C, D und ihren Produkten besteht, ist die *Galois*sche Gruppe unserer Gleichung $H = 0$. Diese Gruppe heiße E.

Da dem Wege $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ nach unseren Festsetzungen ein Weg entspricht, der alle vier Stellen e_i einmal einschließt, so ist $ABCD = (1)$, gleich der identischen Permutation, und daraus folgt

$$D = (ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1} = CBA.$$

Wir können demnach alle Permutationen von E aus A, B und C zusammensetzen. Unter diesen bilden die eine Gruppe für sich, die aus einer geraden Anzahl der Substitutionen A, B, C zusammengesetzt sind. Diese Untergruppe von E heiße $\mathfrak{E}$. Alle Elemente von $\mathfrak{E}$ haben dann die Eigenschaft, daß sie y und damit alle rationalen Funktionen von y ungeändert lassen, während y durch die übrigen Substitutionen von E in $-y$ übergeführt wird. y ist also eine Größe, die zur Gruppe $\mathfrak{E}$ gehört. Davon gleich mehr.

Die Gruppe $\mathfrak{E}$ läßt sich darstellen durch die beiden Permutationen AB und CB. Denn ist irgend eine Permutation aus $\mathfrak{E}$ gegeben, so können wir immer zwei auf einander folgende der in ihr vorkommenden Permutationen A, B, C zusammenfassen, und jedes solche Paar ist durch AB und CB darstellbar, wie leicht daraus folgt, daß $A^2 = B^2 = C^2 = (1)$ ist.

Wir setzen $AB = T$ und $CB = S$.

Nun war

$$D = CBA, \qquad D^{-1} = D,$$

also

$$(CBA)^{-1} = A^{-1} B^{-1} C^{-1} = ABC = CBA$$

oder, wenn wir hinten mit B komponieren,

$$ABCB = CBAB;$$

das heißt

$$TS = ST.$$

Die Gruppe $\mathfrak{E}$ ist demnach eine *Abel*sche Gruppe und alle ihre Elemente lassen sich in der Form $T^\alpha S^\beta$ darstellen.

Ist nun Q eine Permutation aus E, die nicht zu $\mathfrak{E}$ gehört, so gehört QB sicher zu $\mathfrak{E}$ und ist demnach in der Form $S^\alpha T^\beta$ darstellbar, also Q in der Form $S^\alpha T^\beta B$. Ebenso folgt, daß auch jede solche Permutation in der Form $B S^\alpha T^\beta$ darstellbar ist.

§ 3.

Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, daß die Gruppe E von $H = 0$ eine *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{E}$ zum Teiler hat. Da es zu $\mathfrak{E}$ nur die eine Nebengruppe $\mathfrak{E}B$ gibt, so ist der Index von $\mathfrak{E}$ gleich 2. Wir sahen ferner, daß y eine zu $\mathfrak{E}$ gehörige Größe ist. Adjungieren wir also y zu dem Körper der rationalen Funktionen von x, so reduziert sich die Gruppe von $H = 0$ auf $\mathfrak{E}$. Gleichzeitig zerfällt aber die Gleichung $2n$-ten Grades $H = 0$ für η mit in x rationalen Koeffizienten in die Gleichung n-ten Grades $G = 0$, deren Koeffizienten auch y enthalten, und in die aus $G = 0$ durch Vertauschen von y mit $-y$ hervorgehende Gleichung. *Die Gleichung $G = 0$ hat nun als Galoissche Gruppe die Gruppe $\mathfrak{E}$ und ist daher eine Abelsche Gleichung.* Der Grad der Gruppe $\mathfrak{E}$ muß gleich dem Grade von $G = 0$ sein, also gleich n. Die ganze Gruppe E ist vom Grade $2n$.

Da die Gleichung für η, $G = 0$, eine *Abel*sche Gleichung ist, läßt sie sich durch sukzessive Adjunktion von Wurzeln aus rationalen Funktionen lösen. Die Exponenten dieser Wurzeln sind gleich n oder Teiler von n. Die rationalen Funktionen, deren Wurzeln man adjungiert, sind aber nicht willkürlich, sondern sie müssen so gewählt werden, daß die Wurzeln nur an den Stellen $e_i\,(i = 1, \ldots, 4)$ Verzweigungspunkte haben, d. h. daß sie sich überall verhalten wie rationale Funktionen von x und y. Solche Funktionen heißen Wurzelfunktionen. *Danach erhalten wir alle algebraischen Körper über $K(x, y)$, deren Rang gleich Eins ist, auf folgende Weise: Wir adjungieren zu $K(x, y)$ irgend welche Wurzelfunktionen aus K. Dadurch erhalten wir einen neuen Körper K_1. Zu diesem adjungieren wir dann irgend welche Wurzelfunktionen aus K_1 u. s. f.*

§ 4.

Wir wollen nun zeigen, daß die eben geschilderte Art der Bildung der neuen Körper über $K(x, y)$ mit der *Jacobi*schen Transformation identisch ist.

Da die Gleichung $H = 0$ durch Adjunktion einer zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Funktion (nämlich y) in zwei Gleichungen zerfällt, so muß die Gruppe E von H imprimitiv sein und zwar so, daß sich die $2n$ Wurzeln η von $H = 0$ in zwei Reihen von je n Größen ordnen lassen und daß durch alle Permutationen von $\mathfrak{G}$ die Größen jeder der beiden Reihen nur unter einander permutiert werden, während durch alle anderen Permutationen von E die beiden Reihen mit einander vertauscht werden.

Wir bezeichnen die Größen der einen Reihe mit $1, 2, \ldots, n$, die der anderen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, und zwar so, daß durch die Permutation B (§ 2) λ in α_λ übergeht und dann auch umgekehrt, da $B^2 = (1)$ ist (§ 2), α_λ in λ, $(\lambda = 1, \ldots, n)$.

Die Gruppe E ist aber auch in gewissermaßen umgekehrter Weise imprimitiv. Es lassen sich nämlich die $2n$ Größen η in n Reihen von je 2 Größen anordnen, sodaß die Größen einer jeden Reihe durch keine Permutation von E aus einander gerissen werden. Z. B. in folgender Art. Als erste Reihe nehmen wir $1, \alpha_1$. Nun gibt es n verschiedene Substitutionen in $\mathfrak{G}$. Wenden wir diese auf $1, \alpha_1$ an, so erhalten wir im ganzen n Paare μ, α_λ. Diese müssen wegen der Transitivität von $\mathfrak{G}$ alle Größen $1, 2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ enthalten und deshalb können irgend zwei der Paare auch nicht ein Element gemeinsam haben.

Die n so erhaltenen Reihen von je 2 Größen bilden ein System der Imprimitivität. Es heiße L. Es sei nämlich μ, α_λ irgend ein Paar des Systems L und es gehe aus $1, \alpha_1$ durch $T^\alpha S^\beta$ hervor. Wenden wir dann auf μ, α_λ irgend eine Substitution der Form $T^\gamma S^\delta$ an, so ist es dasselbe, als ob wir auf $1, \alpha_1$ die Substitution $T^\alpha S^\beta T^\gamma S^\delta = T^{\alpha+\gamma} S^{\beta+\delta}$ anwenden. Hierdurch geht aber $1, \alpha_1$ nach der Herleitung von L in eine andere Reihe von L über. Wenden wir ferner auf μ, α_λ eine Substitution von der Form $T^\gamma S^\delta B$ an, so hat das dieselbe Wirkung, als ob wir auf $1, \alpha_1$ die Substitution $T^{\alpha+\gamma} S^{\beta+\delta} B$ ausübten. Jede Substitution dieser Art läßt sich aber auch in der Form $B T^\varepsilon S^\zeta$ darstellen. Wenden wir aber auf $1, \alpha_1$ die Substitution $B T^\varepsilon S^\zeta$ an, so geht durch B zunächst $1, \alpha_1$ in $\alpha_1, 1$ über und dann $\alpha_1, 1$ durch $T^\varepsilon S^\zeta$ in ein anderes Paar des Systems L.

Damit ist gezeigt, daß L wirklich ein System der Imprimitivität ist.

Ist nun ξ eine symmetrische Funktion der beiden mit 1 und α_1 bezeichneten Größen, so genügt ξ einer Gleichung n-ten Grades mit rationalen Funktionen von x allein als Koeffizienten. Diese Gleichung sei $F = 0$. Adjungiert man ξ, so reduziert sich die Gruppe von $H = 0$ auf die Gruppe zweiten Grades $(1, B)$ und $H = 0$ zerfällt in lauter quadratische Faktoren.

§ 5.

Es handelt sich nun um eine genauere Untersuchung der Gleichung $F = 0$. Zunächst ihre Gruppe. Die einzelnen Reihen des Systems L bezeichnen wir mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Wir erhalten die Gruppe von $F = 0$, wenn wir alle Permutationen aufsuchen, die unter den Reihen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ durch die Substitutionen von E hervorgerufen werden. Es ruft aber jede Substitution von $\mathfrak{E}$ mit Ausnahme der identischen eine nicht identische Permutation hervor. Die Substitution B oder eine andere der Form $T^\alpha S^\beta B$ kann die identische Permutation hervorrufen; aber, wie wir gleich sehen werden, höchstens für $n = 2$ und $n = 4$. Daraus folgt dann, daß im allgemeinen die Gruppe von $F = 0$ mit der von $H = 0\,(E)$ isomorph ist und nur in speziellen Fällen mit der von $G = 0\,(\mathfrak{E})$. Ist sie mit E isomorph, so wird durch Adjunktion aller Wurzeln von $F = 0$ die Gruppe von $H = 0$ auf die Einheitsgruppe reduziert, d. h. die Gleichung $H = 0$ ist gelöst; es wird dadurch also auch y adjungiert.

In jedem Falle wird nach Adjunktion von y die Gruppe von $F = 0$ mit $\mathfrak{E}$ isomorph. Sie wird also dann eine *Abel*sche Gruppe. Da aber durch $\mathfrak{E}$ alle Reihen $\alpha, \beta, \ldots$ von L mit einander verbunden werden, so bleibt die Gruppe von $F = 0$ auch nach Adjunktion von y transitiv, und die Gleichung $F = 0$ zerfällt nicht durch Adjunktion von y.

Wir wollen nun den Rang der Gleichung $F(\xi) = 0$ bestimmen. ξ darf jedenfalls nur an den Stellen $x = e_i\,(i = 1, \ldots, 4)$ Verzweigungspunkte und zwar erster Ordnung haben. Nun bleibt durch die Substitution B, die 1 mit α_1 vertauscht, ξ ungeändert. B entspricht aber einem Umlauf um den Punkt e_2. Daher hat die Wurzel ξ in e_2 keinen Verzweigungspunkt. Ist nun n ungerade, so können an jeder der Stellen e_i höchstens $\frac{n-1}{2}$ Verzweigungspunkte erster Ordnung vorhanden sein, und es hat an *jeder* der Stellen e_i *eine* der Wurzeln eine reguläre Entwicklung. Die Ordnung des Verzweigungsteilers ist also

$$w \leqq 4 \cdot \frac{n-1}{2} = 2(n-1)$$

und daher der Rang von $F = 0$

$$\begin{aligned} p &= \frac{w}{2} - n + 1 \\ &\leqq n - 1 - n + 1 \\ &\leqq 0. \end{aligned}$$

Da p nicht negativ sein kann, so ist es also Null und w muß genau gleich $2(n-1)$ sein. Es befinden sich demnach an jeder der Stellen e_i genau $\frac{n-1}{2}$ Verzweigungspunkte. Hieraus folgt dann, daß durch keine der Substitutionen A, B, C, D (§ 1) alle Wurzeln von $F = 0$ an ihrer Stelle bleiben können, sondern durch jede von ihnen wirklich permutiert werden und damit auch durch jede Substitution der Form $T^\alpha S^\beta B$.

Ferner sei n gerade. Dann können an jeder Stelle $\frac{n}{2}$ Verzweigungspunkte erster Ordnung vorhanden sein. Aber wir sahen schon, daß an einer Stelle, nämlich e_2, sicher einer weniger sein muß, da die Wurzel ξ sich dort regulär verhält. Es wird demnach in diesem Falle

$$\begin{aligned} w &< 4 \cdot \frac{n}{2} \\ &< 2n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p &< \frac{2n}{2} - n + 1 \\ &< 1. \end{aligned}$$

Also ist auch hier $p = 0$ und $w = 2n-2$. Ist also n gerade, so sind entweder an zweien der Stellen e_i $\frac{n}{2}$ und an den beiden anderen $\frac{n}{2} - 1$ Verzweigungsstellen oder an dreien sind $\frac{n}{2}$ und an einer $\frac{n}{2} - 2$. Ist also $n = 4$, so kann es sein, daß sich an einer der Stellen e_i alle Wurzeln von $F = 0$ regulär verhalten, und im Falle $n = 2$ *müssen* sich die beiden Wurzeln an zweien der Stellen e_i regulär verhalten, sodaß dann A, B, C, oder D oder zwei von ihnen die Wurzeln von $F = 0$ nicht permutieren. Damit ist der oben versprochene Nachweis geführt, daß nur für $n = 2$ oder $n = 4$ die Gruppe von $F = 0$ nicht mit der von $H = 0$ identisch zu sein braucht.

Es ist interessant zu sehen, wie sich auch hier der Unterschied zwischen einem ungeraden und einem geraden Transformationsgrad zeigt und in welcher Art er sich zeigt.

§ 6.

Wir haben also gefunden:

Wir erhalten den transformierten Körper im allgemeinen dadurch, daß wir zu dem Körper der rationalen Funktionen von x alle Wurzeln einer Abelschen Gleichung $F = 0$ n-ten Grades, vom Range Null, mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten, adjungieren. Nur im Falle $n = 2$ und $n = 4$ kann es nötig sein, auch y zu adjungieren.

Zur Darstellung des Körpers $K(\xi, x)$ können wir irgend eine rationale Funktion von ξ und x an Stelle von ξ nehmen. Denn jede solche Funktion hat wieder die wesentliche Eigenschaft von ξ, nämlich eine symmetrische Funktion der mit 1 und α_1 (§ 4) bezeichneten Größen zu sein. Nehmen wir für ξ eine Funktion erster Ordnung, die es immer gibt, und die wir wieder mit ξ bezeichnen, so wird die Gleichung zwischen ξ und x in x linear, bleibt aber in ξ vom n-ten Grade. Wir können daher setzen

$$x = \frac{U(\xi)}{V(\xi)},$$

wo U und V ganze rationale Funktionen n-ten Grades von ξ sind. Damit sind wir zur *Jacobi*schen Form der Transformation gelangt.

Wir können jetzt auch leicht zeigen, daß bei unseren Voraussetzungen über ξ der Körper, der aus allen rationalen Funktionen von ξ, x und y besteht, wirklich ein Körper vom Range Eins ist. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, daß n ungerade ist. Da in diesem Falle von den n Werten, für die ξ gleich e_i $(i = 1, \ldots, 4)$ wird, $n-1$ paarweise zusammenfallen, so wird

$$x - e_i = \frac{R_i(\xi)^2 (\xi - \varepsilon_i)}{V(\xi)} \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

werden müssen, wo $R_i(\xi)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $\frac{n-1}{2}$ bedeutet. Setzen wir demnach

$$\eta = \sqrt{(\xi - \varepsilon_1)(\xi - \varepsilon_2)(\xi - \varepsilon_3)(\xi - \varepsilon_4)},$$

so wird

$$y = \frac{R_1 R_2 R_3 R_4}{V^2} \cdot \eta.$$

Der Körper $K(\xi, x, y,)$ besteht demnach aus allen rationalen Funktionen von η und ξ, ist also vom Range Eins.

§ 7.

Wir haben in § 3 gesehen, daß wir den transformierten Körper aus dem ursprünglichen, durch sukzessive Adjunktion von Wurzelfunktionen erhalten können. Wir wollen den einfachsten Fall, nämlich die Adjunktion *einer* Wurzelfunktion n-ten Grades genauer betrachten und vor allem zusehen, in welcher Beziehung Argument und Perioden der zu den beiden algebraischen Körpern gehörenden elliptischen Funktionen zu einander stehen.

Es werde also zu $K(x, y)$ die Funktion $z = \sqrt[n]{\psi(x, y)}$ adjungiert, wo ψ eine rationale Funktion ist, die an ihren Nullstellen von der n-ten Ordnung Null und an ihren Unendlichkeitsstellen von der n-ten Ordnung unendlich wird. Es sei $\vartheta(u|1, \omega)$ die zu $K(x, y)$ gehörende ungerade ϑ-Funktion. 1 und ω seien ihre Perioden und es sei

$$\vartheta(u+1) = e^{-\pi i}\,\vartheta(u),$$
$$\vartheta(u+\omega) = e^{-\pi i}\,e^{-\pi i(2u+\omega)}\,\vartheta(u).$$

Dann läßt sich die Funktion z immer in der Form darstellen

$$z = Ce^{-2\pi i a v}\,\frac{\prod_i^{1\ldots r}\vartheta(u-a_i)}{\prod_i^{1\ldots r}\vartheta(b-b_i)},$$

wo C eine Konstante ist.

Da z^n eine rationale Funktion sein soll, so muß die Gleichung

$$a_1+a_2+\cdots-b_1-b_2-\cdots = \frac{\gamma\omega+\delta}{n}$$

bestehen, wo γ und δ ganze Zahlen sind, und im besonderen $\gamma = \alpha n$. Soll wirklich erst die n-te Potenz von z rational sein, so dürfen γ, δ, n keinen gemeinsamen Teiler haben.

Wir betrachten speziell die Fälle $\gamma = 0$ (I) und $\delta = 0$ (II).

I. δ ist teilerfremd zu n anzunehmen. Es wird, wenn wir z^n als Funktion von u mit $\varphi(u)$ bezeichnen,

$$\varphi(u+1) = \varphi(u), \qquad \varphi(u+\omega) = e^{2\pi i\frac{\delta}{n}}\varphi(u).$$

Adjungieren wir demnach $\varphi(u)$ zu den elliptischen Funktionen von u mit den Perioden $1, \omega$, so erhalten wir eine Gesamtheit von Funktionen

von u, die nicht mehr die Perioden $1, \omega$ haben, aber doch noch doppelt periodisch sind. Und zwar sieht man leicht, daß man als primitives Periodenpaar dieser Funktionen 1 und $n\omega$ nehmen kann. Bezeichnen wir Argument und Perioden der neuen elliptischen Funktionen mit $u_1, 1, \omega_1$, so haben wir die Transformationsformeln

$$u = u_1, \qquad \omega = \frac{\omega_1}{n}.$$

II. γ muß teilerfremd zu n sein. Es wird

$$\varphi(u+1) = e^{-2\pi i \frac{\gamma}{n}} \varphi(u), \qquad \varphi(u+\omega) = \varphi(u).$$

Wollen wir hier auch, daß die neuen Funktionen die eine Periode 1 haben, so können wir als primitive Perioden nehmen 1 und $\frac{\omega}{n}$, müssen dann aber als Argument nehmen $\frac{u}{n}$, sodaß wir die Transformationsgleichungen haben

$$u = nu_1, \qquad \omega = n\omega_1,$$

den Fällen I. und II. entsprechen also die beiden Haupttransformationen n-ten Grades.*)

§ 8.

Wir wollen zum Schluß noch die beiden Ausnahmefälle, auf die wir in § 5 stießen, kurz behandeln.

I. $n = 2$. In diesem Falle ist die Gleichung für ξ, nämlich $F = 0$, in ξ vom zweiten Grade und wir können sie in der Form annehmen

$$\xi^2 = R(x).$$

Da die Gleichung vom Range Null sein muß, so darf $R(x)$ nur an zwei Stellen von ungerader Ordnung Null oder unendlich werden, und ferner dürfen diese Stellen nur zwei von den Stellen $e_i (i = 1, \ldots, 4)$ sein. Die Adjunktion von ξ kommt also auf die Adjunktion *einer* der Größen

$$\sqrt{(x-e_\alpha)(x-e_\beta)}$$

hinaus. Und man sieht, daß in diesem Falle auch durch Adjunktion beider

*) Siehe hierüber *Weber*, Ellipt. Funktionen und algebr. Zahlen. (Braunschweig, Vieweg & Sohn) Seite 67 und folgende.

Wurzeln $+\sqrt{(x-e_\alpha)(x-e_\beta)}$ und $-\sqrt{(x-e_\alpha)(x-e_\beta)}$ die Größe y nicht mit adjungiert wird, wie es der allgemeinen Theorie entspricht.

II. $n = 4$. Die zu adjungierende Größe ξ muß, wenn der Ausnahmefall eintreten soll, an dreien der Stellen $e_i (i = 1, 2, 3, 4)$ einen Verzweigungspunkt haben, an der vierten nicht. Eine solche Funktion ist z. B.

$$a\sqrt{(x-e_\alpha)(x-e_\beta)} + b\sqrt{(x-e_\alpha)(x-e_\gamma)},$$

wo a und b Konstanten sind und α, β, γ irgend drei verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, 4. Man erhält also alle Transformationen 4-ten Grades der besonderen Art, indem man zum Körper $K(x, y)$ zwei der Größen

$$\sqrt{(x-e_\alpha)(x-e_\beta)} \qquad (\alpha \gtrless \beta)$$

adjungiert, die eine gemeinsame Nullstelle haben. Daß man auf diesem Wege alle solche Transformationen erhält, zeigt man leicht, indem man die allgemeinen Methoden dieser Arbeit auf diesen speziellen Fall anwendet.

Betrachten wir noch die zu diesem Falle gehörende Transformation der elliptischen Funktionen. Es seien $\vartheta_{10}(u)$, $\vartheta_{01}(u)$, $\vartheta_{00}(u)$ die drei geraden zu $K(x, y)$ gehörenden ϑ-Funktionen und $\vartheta_{11}(u)$ die ungerade. Die Perioden seien 1 und ω. Die Normierung wie in *Webers* elliptischen Funktionen. Dann sind zu den ursprünglichen elliptischen Funktionen etwa die Funktionen

$$\varphi_1(u) = \frac{\vartheta_{00}(u)}{\vartheta_{11}(u)} \qquad \text{und} \qquad \varphi_2(u) = \frac{\vartheta_{01}(u)}{\vartheta_{11}(u)}$$

zu adjungieren. Es ist dann (*Weber*, Ellipt. Funktionen § 17, 1)

$$\begin{aligned}
\varphi_1(u+1) &= -\varphi_1(u), & \varphi_2(u+1) &= -\varphi_2(u),\\
\varphi_1(u+\omega) &= -\varphi_1(u), & \varphi_2(u+\omega) &= \varphi_2(u),\\
\varphi_1(u+1+\omega) &= \varphi_1(u), & \varphi_2(u+1+\omega) &= -\varphi_2(u),
\end{aligned}$$

woraus man ersieht, daß man als primitive Perioden der neuen elliptischen Funktionen 2 und 2ω nehmen kann; oder wenn man will, daß wieder eine Periode gleich Eins wird; so hat man als neues Argument u_1 zu nehmen $\frac{u}{2}$. Und man hat die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}
u &= 2u_1,\\
\omega &= \omega_1,
\end{aligned}$$

wodurch in der Tat eine Transformation 4-ter Ordnung ausgedrückt ist und zwar die mit der Determinante $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Theorie der Körper von Matrizen.

(Von *K. Hensel.*)

Wendet man die von *Cayley* in seiner grundlegenden Abhandlung „A Memoir on the Theory of Matrices“ (Philos. Transactions of the R. Society London 1859 vol. 148) gegebenen Regeln für das Rechnen mit Matrizen systematisch auf diese Theorie an, so vereinfacht sie sich in höchst merkwürdiger Weise und geht in eine Arithmetik über, welche nur unwesentlich komplizierter ist, als die gewöhnliche niedere Zahlentheorie. Betrachtet man speziell nur diejenigen Systeme oder Matrizen, welche rationale Funktionen eines Systems A sind, so erhält man einen Bereich von Systemen, welche sich genau nach den Gesetzen der gewöhnlichen Zahlenlehre mit einander verbinden, und die Untersuchung dieser „Körper von Matrizen“ fällt vollständig mit der Theorie der rationalen Funktionen einer Variablen r zusammen, wenn man sie für eine beliebige ganze Funktion von r als Modul betrachtet. Diese Theorie ist aber längst vollständig bekannt und sehr leicht zu entwickeln; und infolgedessen bietet auch die Betrachtung der rationalen Funktionen von A bei dieser Behandlung nicht die geringste Schwierigkeit.

Von diesem Ausgangspunkte habe ich im Wintersemester 1891/92 in einer zweistündigen Vorlesung eine neue Theorie der Körper oder Gattungsbereiche von Matrizen entwickelt. Bei der Vorbereitung für den zweiten Band der *Kronecker*schen Determinantentheorie habe ich diese Untersuchungen wieder aufgenommen, und ihren Inhalt, soweit er mir noch nicht bekannt zu sein schien, in der nachfolgenden Arbeit niedergelegt. Bei dem hier gewählten Eingange ergeben sich die schönen Resultate, welche *Eduard Weyr* in seiner großen Abhandlung „Zur Theorie der bilinearen Formen“

(Monatshefte für Mathematik und Physik. I. Jahrg., 4. und 5. Heft) hergeleitet, aber nicht ohne beträchtliche Schwierigkeiten bewiesen hat, als selbstverständliche Folgerungen, wenn man den zu untersuchenden Körper von Matrizen durch den ihm äquivalenten reduzierten Körper ersetzt.

§ 1.

Es seien

$$A = (a_{ik}), \quad B = (b_{ik}), \ldots \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

beliebige quadratische Systeme von je n^2 Elementen. Es mögen die elementaren Operationen der Addition, Subtraktion Multiplikation und Division für Systeme in der bekannten Weise definiert werden. Dann kann man mit ihnen genau wie mit Zahlen rechnen, nur muß man beachten, daß

erstens die Reihenfolge der Faktoren eines Produktes nicht vertauscht werden darf und daß man

zweitens mit einem Systeme A nur dann dividieren darf, wenn seine Determinante $|A| \gtrless 0$ ist, wenn also das reziproke System $A^{-1} = \frac{1}{A}$ existiert.

Wir werden auch Summen

$$A = A_1 + A_2 + \cdots = (a_{ik}^{(1)} + a_{ik}^{(2)} + \cdots)$$

unendlich vieler Summanden $A_\varrho = (a_{ik}^{(\varrho)})$ betrachten, aber nur dann, wenn die n^2 unendlichen Reihen

$$a_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{\infty} a_{ik}^{(\varrho)},$$

welche die Elemente von A sind, sämtlich konvergieren.

Das Einheitssystem werde durch 1 bezeichnet und allgemeiner sei c ein Diagonalsystem, dessen Diagonalelemente sämtlich gleich c sind.

Eine Anzahl Systeme $A_1, A_2, \ldots A_\mu$ heißen linear unabhängig, wenn zwischen ihnen keine homogene lineare Gleichung:

$$(1.) \qquad c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_\mu A_\mu = 0$$

mit konstanten nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten besteht, wenn also nicht eins derselben homogen und linear durch die $\mu - 1$ übrigen darstellbar ist. Ist wieder allgemein $A_\varrho = (a_{ik}^{(\varrho)})$, so vertritt die eine Systemgleichung (1.) die n^2 gewöhnlichen homogenen Gleichungen:

$$(1^a.) \qquad c_1 a_{ik}^{(1)} + c_2 a_{ik}^{(2)} + \cdots + c_\mu a_{ik}^{(\mu)} = 0. \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Ist $\mu > n^2$, so können diese μ homogenen linearen Gleichungen für $c_1, \ldots, c_\mu$ offenbar stets befriedigt werden. Mehr als n^2 Systeme sind also stets linear abhängig.

Es sei nun A ein beliebiges System, dann wollen wir unter $K(A)$ die Gesamtheit aller derjenigen Systeme verstehen, welche aus A durch die vier elementaren Rechenoperationen hervorgehen, wir bezeichnen diesen abgeschlossenen Bereich von Systemen als den zu A gehörigen Körper von Systemen oder Matrizen. Ebenso bezeichne $K(A, B)$ die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von A und B mit konstanten Koeffizienten u. s. w.

Da zwei rationale Funktionen $\varphi(A)$ und $\psi(A)$ offenbar mit einander vertauschbar sind, so fällt für das Rechnen mit den Systemen des Körpers $K(A)$ die erste oben gemachte Beschränkung fort; man kann also mit *diesen* Systemen genau wie mit Zahlen rechnen, nur darf man nicht mit einem System dividieren, dessen Determinante Null ist.

Der einfachste Körper ist die Gesamtheit $K(1)$ aller Diagonalsysteme c, deren Diagonalelemente beliebige Konstanten sind.

Ist A ein System von nichtverschwindender Determinante, so enthält der Körper $K(A)$ den Körper $K(1)$ als Teiler, da in $K(A)$ das Element $\frac{A}{A} = 1$, also auch jedes Element c von $K(1)$ enthalten ist. Ist dagegen $|A| = 0$, so besitzen auch alle Elemente von $K(A)$ die Determinante Null; dieser Körper enthält also $K(1)$ nicht als Teiler. Ist dies der Fall, so wollen wir statt $K(A)$ den diesen enthaltenden Körper $K(1, A)$ betrachten.

In diesem Körper gibt es dann stets ein solches Element $\bar{A}$, daß $K(\bar{A}) = K(1, A)$ ist. Betrachten wir nämlich das System von $K(1, A)$

$$\bar{A} = r + A = \begin{pmatrix} a_{11}+r, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}+r, & \ldots, & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}+r \end{pmatrix}$$

so ist seine Determinante:

$$|\bar{A}| = |r + A| = r^n + b_1 r^{n-1} + \cdots + b_n$$

für ein unbestimmtes r sicher von Null verschieden, und man kann r auf unendlich viele Arten so wählen, daß $|\bar{A}| \gtrless 0$ ist. Tut man dies, so enthält der Körper $K(\bar{A})$, der ja ein Teiler von $K(1, A)$ ist, den Körper $K(1)$, und da dann auch $A = \bar{A} - r$ zu $K(\bar{A})$ gehört, so gehören auch alle Ele-

mente von $K(1, A)$ zu $K(\overline{A})$; jene beiden Körper sind dann also identisch. Wir können und wollen somit gleich das System A so wählen, daß seine Determinante nicht Null ist.

Jedes System A genügt einer eindeutig bestimmten Gleichung des niedrigsten Grades

$$(2.) \qquad f(A) = A^\nu + c_1 A^{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1} A + c_\nu = 0$$

mit konstanten Koeffizienten. Unter den unendlich vielen Systemen der Reihe:

$$1, A, A^2, \ldots, A^\nu, \ldots$$

können nämlich nach der oben gemachten Bemerkung höchstens n^2 linear unabhängig sein. Besteht also zwischen den $(\nu+1)$ ersten die lineare Gleichung (2.), während $(1, A, \ldots, A^{\nu-1})$ linear unabhängig sind, so ist (2.) die Gleichung niedrigsten Grades für A, und diese ist offenbar eindeutig bestimmt. Eine andere Gleichung $\psi(r) = 0$ kann dann und nur dann für $r = A$ erfüllt sein, wenn $\psi(r)$ durch $f(r)$ im gewöhnlichen Sinne teilbar ist. Wir wollen die Gleichung $f(r) = 0$, welcher A genügt, die zu A gehörige Gleichung, und ihre linke Seite die zu A gehörige Funktion nennen.

Es ist leicht, die zu einem System A gehörige Funktion $f(r)$ zu bestimmen. Ist nämlich (2.) die Gleichung niedrigsten Grades für A, so ist

$$\frac{f(r)}{r-A} = \frac{f(r)-f(A)}{r-A} = g(r)$$

eine ganze Funktion von r; und besteht umgekehrt diese Gleichung, so muß $f(A) = 0$ sein. Also ist

$$(r-A)^{-1} = \frac{1}{r-A} = \frac{g(r)}{f(r)},$$

und der Bruch rechts erscheint in seiner reduzierten Form. Mithin ist die zu A gehörige Funktion der gemeinsame Nenner, oder, was hier offenbar dasselbe ist, der größte gemeinsame Teiler der n^2 Elemente des zu

$$(3.) \qquad r-A = (-1)^n \begin{pmatrix} a_{11}-r, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-r, & \ldots, & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}-r \end{pmatrix}$$

reziproken Systemes. Daher ist $f(r)$ der erste Elementarteiler des zu $r-A$ reziproken Systemes $\frac{1}{r-A}$, oder also der letzte Elementarteiler des Systemes (3).

Die Determinante $|r-A|$ ist gleich dem Produkte der n zu dem Systeme $(r-A)$ gehörigen Elementarteiler, und jeder dieser Elementarteiler ist durch den vorhergehenden teilbar. Also ist die zu A gehörige Funktion $f(r)$ ein solcher Teiler der Funktion n-ten Grades:

$$(4.) \qquad |r-A| = r^n + C_1 r^{n-1} + \cdots + C_n = F(r),$$

welcher jeden Linearfaktor von $F(r)$ mindestens einmal enthält. Der Grad der Gleichung für ein System ist ferner im allgemeinen kleiner als n und dann und nur dann gleich n, wenn alle Elementarteiler des Systemes $r-A$ mit Ausnahme des letzten gleich Eins sind.

Ist

$$f(r) = f_1(r) f_2(r)$$

irgend eine Zerlegung der zu A gehörigen Funktion in Faktoren niedrigeren Grades, so sind die Determinanten $|f_1(A)|$ und $|f_2(A)|$ der Systeme $f_1(A)$ und $f_2(A)$ stets gleich Null.

Besäße nämlich z. B. das System $f_1(A)$ eine von Null verschiedene Determinante, so könnte man die Gleichung:

$$f(A) = f_1(A) f_2(A) = 0$$

nach der auf S. 117 gemachten zweiten Bemerkung durch $f_1(A)$ dividieren; aus der dann sich ergebenden Gleichung

$$f_2(A) = 0$$

würde aber gegen unsere Voraussetzung folgen, daß $f(r) = 0$ nicht die Gleichung des niedrigsten Grades ist, welcher A genügt.

Ist allgemeiner $g(r)$ eine beliebige ganze Funktion von r, so besitzt das System $g(A)$ dann und nur dann eine verschwindende Determinante, wenn $g(r)$ und $f(r)$ einen gemeinsamen Teiler haben. Ist nämlich

$$f(r) = \bar{f}(r) f_0(r), \qquad g(r) = \bar{f}(r) g_0(r),$$

so ist ja $|g(A)| = |\bar{f}(A)||g_0(A)| = 0$. Sind dagegen $f(r)$ und $g(r)$ teilerfremd, und sind $f_1(r)$ und $g_1(r)$ so gewählt, daß:

$$f(r) f_1(r) + g(r) g_1(r) = 1$$

ist, so ergibt sich für $r = A$

$$g(A)\, g_1(A) = 1,$$

und durch Übergang zu den Determinanten folgt

$$|g(A)|\,|g_1(A)| = 1,$$

d. h. es ist notwendig $|g(A)| \gtrless 0$, wie zu beweisen war.

Hieraus folgt, daß der Körper $K(1, A)$ aus der Gesamtheit aller rationalen Funktionen $\frac{g(A)}{h(A)}$ von A besteht, deren Nenner $h(A)$ zu $f(A)$ teilerfremd ist, oder, was dasselbe ist, daß $K(1, A)$ eindeutig der Gesamtheit $K(r)$ aller rationalen Funktionen $\frac{g(r)}{h(r)}$ entspricht, wenn man diese für den Modul $f(r)$ betrachtet, und wenn man nur diejenigen Brüche betrachtet, deren Nenner $h(r)$ in der reduzierten Form zum Modul teilerfremd ist.

Die Gesamtheit dieser rationalen Funktionen modulo $f(r)$ betrachtet, kann aber, wie jetzt gezeigt werden wird, sehr einfach behandelt werden. Ersetzen wir dann die Variable r durch das System A, so entspricht jedem vorher über den Bereich $K(r)$ abgeleiteten Resultate dasselbe Resultat für den Bereich $K(1, A)$.

Jede Funktion $\frac{g(r)}{h(r)}$, deren Nenner zu $f(r)$ relativ prim ist, kann zunächst modulo $f(r)$ auf eine einzige Weise in der Form

$$u_0 + u_1 r + \cdots + u_{\nu-1} r^{\nu-1}$$

dargestellt werden. Da nämlich $h(r)$ n. d. V. zu $f(r)$ teilerfremd ist, so kann man $h_1(r)$ und $f_1(r)$ so bestimmen, daß:

$$h(r)\, h_1(r) + f(r)\, f_1(r) = 1,$$

und daß auch $h_1(r)$ zu $f(r)$ teilerfremd ist. Hieraus folgt aber:

$$h_1(r) \equiv \frac{1}{h(r)} \pmod{f(r)}$$

und hieraus folgt:

$$\frac{g(r)}{h(r)} \equiv g(r)\, h_1(r) \equiv u_0 + u_1 r + \cdots + u_{\nu-1} r^{\nu-1} \pmod{f(r)},$$

wo die rechts stehende ganze Funktion $(\nu-1)$-ten Grades der Rest der Division von $g(r)\, h_1(r)$ durch $f(r)$ ist. Ersetzt man in dieser Kongruenz r durch A, so ergibt sich der Satz:

Alle Systeme des Körpers $K(1, A)$ können auf eine und nur eine Weise in der Form:

$$u_0 + u_1 A + \cdots + u_{\nu-1} A^{\nu-1}$$

dargestellt werden. Die ν Systeme $(1, A, \ldots, A^{\nu-1})$ bilden also ein Fundamentalsystem für $K(1, A)$.

Allgemeiner bildet ein System von ν Matrizen $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ von $K(1, A)$ dann und nur dann ebenfalls ein Fundamentalsystem für jenen Körper, wenn diese linear unabhängig sind, d. h. wenn aus einer Gleichung:

$$u_1 A_1 + \cdots + u_\nu A_\nu = 0$$

mit Notwendigkeit das Verschwinden der ν Koeffizienten u_i folgt.

Ein solches Fundamentalsystem, welches die Behandlung des Körpers $K(1, A)$ ganz außerordentlich vereinfacht, ergibt sich durch die folgenden Betrachtungen: Wir betrachten wieder den Bereich $K(r)$ modulo $f(r)$ und denken uns den Modul in seine gleichen und verschiedenen Linearfaktoren zerlegt. Es sei:

$$(5.) \qquad f(r) = (r-r_1)^{d_1} (r-r_2)^{d_2} \ldots (r-r_h)^{d_h}$$

diese Zerlegung; dann sei allgemein $f_i(r)$ der komplementäre Faktor zu $(r-r_i)^{d_i}$, so daß $f_1(r), \ldots, f_h(r)$ durch die Gleichungen definiert sind:

$$(6.) \quad f(r) = (r-r_1)^{d_1} f_1(r) = (r-r_2)^{d_2} f_2(r) = \cdots = (r-r_h)^{d_h} f_h(r).$$

Jede Funktion $f_i(r) = \dfrac{f(r)}{(r-r_i)^{d_i}}$ enthält dann jeden Linearfaktor $(r-r_k)$ außer dem i-ten genau so oft, als $f(r)$ selbst, während sie $(r-r_i)$ gar nicht enthält; es ist also stets:

$$f_i(r) f_k(r) \equiv 0 \pmod{f(r)}. \qquad (i \gtrless k)$$

Da somit die h Funktionen $(f_1(r), \ldots, f_h(r))$ keinen allen gemeinsamen Teiler haben, so kann man h Multiplikatoren $(g_1(r), \ldots, g_h(r))$ so bestimmen, daß

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_h g_h = 1$$

ist. Setzen wir nun allgemein

$$f_i(r) g_i(r) \equiv E_i(r) \pmod{f(r)},$$

so besteht für die h ganzen Funktionen $E_1(r), \ldots, E_h(r)$ die Kongruenz:

$$(7.) \qquad E_1(r) + E_2(r) + \cdots + E_h(r) \equiv 1 \pmod{f(r)}$$

und es ist auch für sie, sobald $i \gtrless k$ ist,

$$(8.) \qquad E_i(r)\, E_k(r) \equiv 0 \pmod{f(r)},$$

da sie Multipla von $f_1, \ldots, f_h$ sind. Multipliziert man also die obige Kongruenz (7.) z. B. mit E_i und läßt alle Produkte $E_i E_k$ fort, so ergibt sich für $i = 1, 2, \ldots, h$

$$(8^a.) \qquad E_i^2(r) \equiv E_i(r) \pmod{f(r)}.$$

Wir setzen zweitens:

$$(9.) \qquad E_i(r)\,(r - r_i) = A_i(r).$$

Dann ist ebenfalls für $i \gtrless k$

$$(10.) \qquad A_i(r)\, A_k(r) \equiv 0 \pmod{f(r)}$$

und wegen $(8^a.)$

$$(10^a.) \quad A_i(r)^2 = E_i(r)^2\,(r - r_i)^2 \equiv E_i(r)\,(r - r_i)^2 \pmod{f(r)},$$

und hieraus folgt durch sukzessives Weiterschließen, daß

$$(10^b.) \qquad A_i^{d_i}(r) \equiv E_i(r)\,(r - r_i)^{d_i} \equiv 0 \pmod{f(r)}$$

ist, und daß dies die Kongruenz niedrigsten Grades ist, der $A_i(r)$ modulo $f(r)$ genügt.

Wir wollen der Gleichmäßigkeit wegen:

$$(11.) \qquad E_i(r) = A_i^0(r)$$

setzen, und eine jede Funktion von der Form:

$$\varphi(A_i) = a_0 A_i^0 + a_1 A_i + a_2 A_i^2 + \cdots + a_{d_i - 1} A_i^{d_i - 1}$$

eine ganze Funktion des $(d_i - 1)$*-ten Grades von* A_i nennen. Wegen der Kongruenz $(10^b.)$ kann jede ganze Funktion höheren Grades dadurch auf den $(d_i - 1)$-ten Grad reduziert werden, daß man alle höheren Potenzen von A_i einfach fortläßt. Für zwei beliebige ganze Funktionen von A_i und A_k besteht ferner die Kongruenz:

$$\varphi(A_i)\, \varphi(A_k) \equiv 0 \pmod{f(r)},$$

weil sie bzw. die Funktionen E_i und E_k als Faktoren enthalten.

Hiernach beweisen wir leicht, daß die $d_1 + d_2 + \cdots + d_h = \nu$ ganzen Funktionen von r

$$(12.)\qquad \begin{cases} A_1^0,\ A_1,\ A_1^2, \ldots, A_1^{d_1-1} \\ A_2^0,\ A_2,\ A_2^2, \ldots, A_2^{d_2-1} \\ \vdots \\ A_h^0,\ A_h,\ A_h^2, \ldots, A_h^{d_h-1} \end{cases}$$

ein Fundamentalsystem für den Bereich $K(r)$ modulo $f(r)$ bilden. Nach der oben gemachten Bemerkung brauchen wir nämlich nur nachzuweisen, daß diese ν Funktionen modulo $f(r)$ linear unabhängig sind, daß also eine Kongruenz:

$$\varphi_1(A_1)+\varphi_2(A_2)+\cdots+\varphi_h(A_h) \equiv 0 \qquad (\text{mod } f(r))$$

nur dann möglich ist, wenn die ν Koeffizienten jener ganzen Funktionen φ_i sämtlich verschwinden. Betrachtet man aber diese Kongruenz z. B. nur modulo $(r-r_1)^{d_1}$ und beachtet, daß dann alle Elemente von (12.) außer denen in der ersten Reihe durch den neuen Modul teilbar sind, während allgemein

$$A_1^i \equiv E_1(r-r_1)^i \equiv A_1^0(r-r_1)^i \qquad (\text{mod } (r-r_1)^{d_1})$$

wird, so geht unsere Kongruenz nach Weglassung des gemeinsamen Faktors A_1^0 über in die folgende:

$$\varphi_1((r-r_1)) \equiv a_0+a_1(r-r_1)+\cdots+a_{d_1-1}(r-r_1)^{d_1-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod } (r-r_1)^{d_1}),$$

und diese ist offenbar nur dann erfüllt, wenn wirklich alle Koeffizienten a_k Null sind.

Mit Hülfe des soeben bestimmten „*normalen Fundamentalsystemes*“ für den Körper $K(r)$ modulo $f(r)$ ergibt sich nun eine sehr einfache Darstellung aller Elemente von $K(r)$ durch dasselbe.

Zunächst erhält man wegen (7.) für r selbst die Kongruenz:

$$\begin{aligned} r &\equiv r(A_1^0+A_2^0+\cdots+A_h^0) \\ &\equiv \Sigma(r_i+(r-r_i))A_i^0 \end{aligned} \qquad (\text{mod } f(r))$$

d. h. es ist:

$$(13.)\qquad r \equiv (r_1 A_1^0+A_1)+(r_2 A_2^0+A_2)+\cdots+(r_h A_h^0+A_h);$$

r ist also die Summe von h linearen Funktionen bzw. von $A_1, A_2, \ldots, A_h$.

Es sei nun

$$R = \varphi(r)$$

ein Element von $K(r)$, d. h. eine beliebige rationale ganze oder gebrochene Funktion von r, deren Nenner aber, falls ein solcher existiert, zu $f(r)$

teilerfremd ist; dann ergibt sich leicht die Kongruenz:

$$R = \varphi(r) = \varphi(\Sigma r_i A_i^0 + A_i)$$
$$\equiv \varphi(r_1 A_1^0 + A_1) + \varphi(r_2 A_2^0 + A_2) + \cdots + \varphi(r_h A_h^0 + A_h) \pmod{f(r)},$$

weil das Produkt irgend zweier rationaler Funktionen von $(r_i A_i^0 + A_i)$ und $(r_k A_k^0 + A_k)$ stets durch $f(r)$ teilbar ist. Entwickelt man jetzt also jede der Funktionen $\varphi(r_i A_i^0 + A_i)$ mit Hülfe des *Taylor*schen Satzes nach Potenzen von A_i und beachtet, daß $A_i^{d_i}$ und alle höheren Potenzen von A_i durch $f(r)$ teilbar sind, so erhält man die folgende einfache Darstellung von $\varphi(r)$ durch unser Fundamentalsystem:

$$(13^a.)\quad R = \varphi(r)$$
$$= \sum_{i=1}^{h} \left(\varphi(r_i) A_i^0 + \varphi'(r_i) A_i + \frac{\varphi''(r_i)}{2!} A_i^2 + \cdots + \frac{\varphi^{(d_i-1)}(r_i)}{(d_i-1)!} A_i^{d_i-1}\right).$$

Die Koeffizienten jedes Elements A_i^k in jener Darstellung von $\varphi(r)$ durch unser Fundamentalsystem sind also die stets endlichen Werte der Ableitungen

$$\frac{\varphi^{(k)}(r)}{k!}$$

für die betreffende Wurzel r_i. Man erkennt also auch so, daß eine Funktion

$$R = \varphi(r)$$

des Körpers $K(r)$ dann und nur dann einen gemeinsamen Teiler mit dem Modul $f(r)$ hat, wenn mindestens eine der h Zahlen

$$\varphi(r_1), \varphi(r_2), \ldots, \varphi(r_h)$$

gleich Null ist, und daß sie dann und nur dann einen einzigen Linearfaktor mit $f(r)$ gemeinsam hat, wenn nur eine jener h Zahlen etwa $\varphi(r_1) = 0$ und zugleich $\varphi'(r_1) \gtrless 0$ ist.

Hieraus folgt, daß jede Funktion $R = \varphi(r)$ modulo $f(r)$ betrachtet der Kongruenz ν-ten Grades

$$(14.)\quad (R-\varphi(r_1))^{d_1} (R-\varphi(r_2))^{d_2} \ldots (R-\varphi(r_h))^{d_h} \equiv 0 \pmod{f(r)}$$

genügt, und daß diese dann und nur dann die Kongruenz niedrigsten Grades ist, wenn

1. die h Zahlen $\varphi(r_1), \varphi(r_2), \ldots, \varphi(r_h)$ alle verschieden sind,
2. keine der h Zahlen $\varphi'(r_1), \varphi'(r_2), \ldots, \varphi'(r_h)$ gleich Null ist.

In der Tat, wäre etwa $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$, so wäre ja $R - \varphi(r_1)$ bereits mindestens durch das Produkt $(r-r_1)(r-r_2)$ teilbar; wäre aber etwa $\varphi'(r_1) = 0$, so enthielte $R - \varphi(r_1)$ mindestens das Quadrat von $(r-r_1)$ und in beiden Fällen wäre somit (14.) nicht die Kongruenz niedrigsten Grades für R.

Ist $R = \varphi(r)$ ein beliebiges Element von $K(r)$, so konstituiert $K(R)$ einen Körper, welcher einen Teilbereich von $K(r)$ bildet, weil alle Elemente von $K(R)$ auch zu $K(r)$ gehören, aber im allgemeinen das Umgekehrte nicht gilt. Das letztere ist dann und nur dann der Fall, wenn die Kongruenz niedrigsten Grades für R ebenfalls vom ν-ten Grade ist, wenn also

$$1. \quad \varphi(r_i) \gtrless \varphi(r_k), \qquad (i \gtrless k)$$

$$2. \quad \varphi'(r_i) \gtrless 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

ist; denn nur in diesem Falle sind die ν Potenzen

$$1, R, R^2, \ldots, R^{\nu-1}$$

linear unabhängig, bilden also auch für $K(r)$ ein Fundamentalsystem. Ein solches Element R, welches ebenso wie r selbst zur vollständigen Darstellung von $K(r)$ verwandt werden kann, soll *ein primitives Element* von $K(r)$ genannt werden.

Ersetzt man nun in den soeben gefundenen Kongruenzen die Variable r durch das zugrunde gelegte System A, wodurch der Modul $f(A)$ sich auf Null reduziert, so gehen sie in Gleichungen für die zugeordneten Matrizen über. Die so sich ergebenden Resultate können dann folgendermaßen ausgesprochen werden:

Es sei $A = (a_{ik})$ ein beliebiges quadratisches System und

$$(15.) \qquad f(A) = (A-r_1)^{d_1}(A-r_2)^{d_2}\ldots(A-r_h)^{d_h} = 0$$

sei die in ihre Linearfaktoren zerlegte Gleichung niedrigsten Grades für A. Dann kann man entsprechend jenen h Linearfaktoren in dem Körper $K(1, A)$ h Systeme:

$$(16.) \qquad A_1^0, A_2^0, \ldots, A_h^0$$

so auswählen, daß allgemein:

$$(16^a.) \qquad A_i^0 = \frac{f(A)}{(A-r_i)^{d_i}} g_i(A)$$

ist, wo $g_i(A)$ eine geeignet gewählte ganze Funktion von A bedeutet. Dann bestehen für $i \gtrless k$ die Gleichungen:

$$A_i^0 A_k^0 = 0 \tag{17.}$$

und

$$(A_i^0)^2 = A_i^0 . \tag{17a.}$$

Setzt man ferner für $i = 1, 2, \ldots, h$:

$$A_i = A_i^0 (A - r_i), \tag{18.}$$

so sind die zu $A_1, \ldots, A_h$ gehörigen Gleichungen:

$$A_i^{d_i} = 0 . \tag{18a.}$$

Jedes System

$$B = \varphi(A)$$

des Körpers $K(1, A)$ läßt sich dann auf eine und nur eine Weise durch das *normale Fundamentalsystem:*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A_1^0, & A_1, \ldots, & A_1^{d_1-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_h^0, & A_h, \ldots, & A_h^{d_h-1} \end{array} \right. \tag{19.}$$

mit konstanten Koeffizienten darstellen, und zwar ist allgemein:

$$\begin{aligned} B = \varphi(A) &= \sum_{i=1}^{h} \left(\varphi(r_i) A_i^0 + \varphi'(r_i) A_i + \cdots + \frac{\varphi^{(d_i-1)}(r_i)}{(d_i-1)!} A_i^{d_i-1} \right) \\ &= B_1 + B_2 + \cdots + B_h , \end{aligned} \tag{20.}$$

wo allgemein $B_i = \varphi_i(A_i)$ eine rationale Funktion von dem Elemente A_i ist, also dem *primitiven* Körper

$$K(A_i^0, A_i)$$

angehört, dessen zugehörige Gleichung die einfachste Gestalt:

$$A_i^{d_i} = 0$$

hat. Die Untersuchung des allgemeinsten Körpers $K(1, A)$ ist somit vollständig auf die Betrachtung dieser Primitivkörper $K(A_i^0, A_i)$ reduziert, in welchem an die Stelle des Einheitssystems 1 nur das Einheitssystem A_i^0 getreten ist, welches aber innerhalb jenes Primitivkörpers genau dieselben Eigenschaften besitzt, wie das System 1 innerhalb $K(1, A)$. Das System A selbst wird folgendermaßen durch unser Fundamentalsystem dargestellt:

$$A = (r_1 A_1^0 + A_1) + \cdots + (r_h A_h^0 + A_h). \tag{20a.}$$

Das System B in (20.) hat dann und nur dann eine von Null verschiedene Determinante, wenn die h Anfangskoeffizienten $\varphi(r_i)$ sämtlich von Null verschieden sind, wenn also die h ganzen Funktionen:

$$\varphi_i(A_i)\,.$$

mit den zugehörigen Funktionen $A_i^{d_i}$ keinen gemeinsamen Teiler haben. Sind

$$B = B_1 + B_2 + \cdots + B_h$$
$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_h$$

zwei Systeme von $K(1, A)$, so bestehen für die elementaren Rechenoperationen mit ihnen die Vorschriften:

$$B \pm C = (B_1 \pm C_1) + \cdots + (B_h \pm C_h)$$
$$BC = \quad B_1 C_1 \; + \cdots + \quad B_h C_h$$

und, falls $|C| \gtrless 0$ ist:

$$\frac{B}{C} = \frac{B_1}{C_1} + \cdots + \frac{B_h}{C_h}.$$

Jedes System $B = \varphi(A)$ des Körpers $K(1, A)$ genügt ebenfalls einer Gleichung ν-ten Grades, nämlich der Gleichung:

$$F(B) = (B - \varphi(r_1))^{d_1} \ldots (B - \varphi(r_h))^{d_h} = 0,$$

und diese ist dann und nur dann die Gleichung niedrigsten Grades für B, wenn

1. $\varphi(r_i) \gtrless \varphi(r_k)$,
2. $\varphi'(r_i) \gtrless 0$

ist. Nur in diesem Falle sind die beiden Körper $K(1, A)$ und $K(1, B)$ identisch; andernfalls ist $K(1, B)$ unter $K(1, A)$ enthalten.

§ 2.

Ich nenne zwei Körper $K(1, A)$ und $K(1, B)$ *äquivalent*, wenn man zwei solche Multiplikatoren P und Q finden kann, daß für zwei entsprechende rationale Funktionen $\varphi(A)$ und $\varphi(B)$ jener beiden Körper:

(1.) $$P \cdot \varphi(A) \cdot Q = \varphi(B)$$

ist. Wählt man für $\varphi(A)$ speziell den Linearfaktor $(r - A)$, so folgt aus der Gleichung:

(1ª.) $$P(r - A)\,Q = r - B,$$

die dann bestehen muß, daß

$$PQ = 1, \quad \text{also} \quad Q = P^{-1},$$

daß also zwischen A und B die Gleichung

$$PAP^{-1} = B \tag{2.}$$

erfüllt ist. Besteht eine solche Gleichung, so sagen wir, A gehe durch eine kontragrediente Transformation in B über. Ist diese Gleichung umgekehrt erfüllt, so folgt auch leicht, daß

$$PA^iP^{-1} = B^i$$

$$P(u_0 + u_1 A + \cdots + u_{\nu-1} A^{\nu-1}) P^{-1} = u_0 + u_1 B + \cdots + u_{\nu-1} B^{\nu-1},$$

daß also dann in der Tat $K(1, A)$ und $K(1, B)$ äquivalent sind.

Zwei Körper $K(1, A)$ und $K(1, B)$ sind also dann und nur dann äquivalent, wenn die erzeugenden Systeme durch eine kontragrediente Transformation in einander übergehen.

Da jede Funktion $\varphi(A)$ durch jene Transformation in die entsprechende Funktion $\varphi(B)$ übergeht, so ergeben sich ohne weiteres die Sätze:

Sind $K(1, A)$ und $K(1, B)$ äquivalente Körper, so genügen A und B derselben Gleichung $f(r) = 0$, und die ν Elemente der beiden normalen Fundamentalsysteme

$$A_i^{k_i} \quad \text{und} \quad B_i^{k_i} \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, \ldots, h)\\ (k_i = 0, 1, \ldots, d_i - 1)\end{matrix}$$

sind dieselben rationalen Funktionen von A bezw. von B.

Da somit für diese ν Elemente die Gleichungen

$$PA_i^{k_i}P^{-1} = B_i^{k_i}$$

bestehen, so besitzen je zwei solche Elemente denselben Rang. Wir bezeichnen den Rang eines Systems $A_i^{k_i}$ durch $[A_i^{k_i}] = a_i^{(k_i)}$. Dann können wir zunächst den folgenden einfachen Satz aussprechen:

Von zwei Systemen A und B geht jedes nur dann in das andere durch kontragrediente Transformation über, wenn beide derselben Gleichung genügen und wenn die ν Elemente der beiden normalen Fundamentalsysteme beziehlich gleichen Rang haben.

Ich will jetzt weiter zeigen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind. Sind sie nämlich erfüllt, so beweist man, daß der Körper $K(1, A)$ einem *sogenannten reduzierten Körper* äquivalent ist, für welchen die ν

Elemente des Fundamentalsystems durch die ν Rangzahlen $a_i^{(k)}$ eindeutig bestimmt sind. Stimmen daher jene Rangzahlen für $K(1, A)$ und $K(1, B)$ beziehlich überein, so sind diese demselben reduzierten Körper und somit auch unter einander äquivalent. Außerdem kennt man dann offenbar auch eine kontragrediente Transformation, welche A in B überführt.

§ 3.

Zu diesem Beweise gelangt man leicht mit Hülfe einiger Sätze über die Zerlegung von Systemen in Partialsysteme, welche auch bei anderen eingehenderen Untersuchungen über Systeme mit Nutzen gebraucht werden können.

Es seien $e_1, e_2, \ldots, e_\varrho$ ϱ ganze Zahlen, deren Summe

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_\varrho = n \tag{1.}$$

ist. Wir teilen nun ein beliebiges System n-ter Ordnung dadurch in ϱ Partialsysteme, daß wir die e_1 ersten Horizontalreihen $H_1, \ldots, H_{e_1}$ zu einem ersten Horizontalabschnitt, dann die e_2 folgenden $H_{e_1+1}, \ldots, H_{e_1+e_2}$ zu einem zweiten, ... und die e_ϱ letzten Zeilen zu einem ϱ-ten Horizontalabschnitte zusammenfassen. Genau ebenso rechnen wir die e_1 ersten Vertikalreihen $V_1, \ldots, V_{e_1}$ in einen ersten u. s. w., die e_ϱ letzten Vertikalreihen in einen letzten Vertikalabschnitt.

Bezeichnen wir nun das Partialsystem mit A_{ik}, in welchem nur diejenigen $e_i\, e_k$ Elemente mit den entsprechenden Elementen von A übereinstimmen, welche zugleich in dem i-ten Horizontalabschnitte und in dem k-ten Vertikalabschnitte sich befinden, während alle anderen gleich Null sind, so kann A folgendermaßen geschrieben werden:

$$A = \sum_{i=1}^{\varrho} \sum_{k=1}^{\varrho} A_{ik}, \tag{2.}$$

und jenes System kann auch in leicht verständlicher Weise durch die ϱ^2 Partialsysteme so dargestellt werden:

$$A = (A_{ik}) = \begin{pmatrix} A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1\varrho} \\ A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2\varrho} \\ \vdots \\ A_{\varrho 1}, A_{\varrho 2}, \ldots, A_{\varrho\varrho} \end{pmatrix}. \qquad {\scriptstyle (i,k=1,2,\ldots,\varrho)} \tag{2a.}$$

Diese Darstellung geht in die gewöhnliche $A = (a_{ik})$ in dem extremen Falle über, daß $\varrho = n$, daß also $e_1 = e_2 = \cdots = e_\varrho = 1$ ist.

Bei dieser Schreibweise ergeben sich für die elementaren Rechenoperationen leicht die folgenden Vorschriften, welche mit den entsprechenden für die gewöhnliche Darstellung der Systeme durch ihre Elemente wörtlich übereinstimmen: Sind

$$A = (A_{ik}), \qquad B = (B_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

zwei beliebige, durch ihre ϱ^2 Partialsysteme dargestellte Systeme, so ist

$$aA + bB = (aA_{ik} + bB_{ik}).$$

Ist ferner $C = (C_{il}) = AB$, so entsteht jedes Partialsystem C_{il} des Produktes aus den entsprechenden Partialsystemen der Faktoren durch die Kompositionsgleichungen:

$$(3.) \qquad \begin{cases} C_{il} = A_{i1} B_{1l} + A_{i2} B_{2l} + \cdots + A_{i\varrho} B_{\varrho l} \\ \quad = \sum_{k=1}^{\varrho} A_{ik} B_{kl}, \end{cases} \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

wo die Multiplikation der Matrizen A_{ik} und B_{kl} nach der gewöhnlichen Kompositionsvorschrift für Matrizen auszuführen ist. Ersetzt man in den Systemen A und B alle Partialsysteme außer je einem durch Nullen, so ergeben sich für die Multiplikation zweier beliebigen Partialsysteme die Gleichungen:

$$(3^a.) \qquad \begin{cases} A_{ab} B_{cd} = 0 \\ A_{ab} B_{bd} = C_{ad} \end{cases} \qquad (b \gtrless c).$$

Wir können diese Gleichungen in die eine zusammenfassen:

$$(3^b.) \qquad A_{ab} B_{cd} = \delta_{b,c} C_{ad}, \qquad \left(\begin{matrix} \delta_{bc} = 0, b \gtrless c \\ \delta_{bb} = 1 \end{matrix}\right)$$

und wo das System C_{ad} immer das Kompositionsresultat von A_{ab} und B_{bd} in dem gewöhnlichen Sinne ist, daß die Elemente der Horizontalreihen von A_{ab} mit den entsprechenden Elementen der Vertikalreihen von B_{bd} multipliziert und diese Produkte dann addiert werden. Ist z. B. P_{ab} ein beliebiges Partialsystem, welches keines der ϱ Diagonalsysteme P_{aa}, für welches also $a \gtrless b$ ist, so ist stets $P_{ab}^2 = 0$, und hieraus folgt

$$(3^c.) \qquad (1 - P_{ab})(1 + P_{ab}) = 1;$$

die beiden Systeme $1 - P_{ab}$ und $1 + P_{ab}$ sind also stets reziprok.

Wir wollen mitunter die Summe aller dem i-ten Horizontalabschnitte zugehörigen Partialsysteme durch A_{i0} und ebenso die Summe aller in dem k-ten Vertikalabschnitte auftretenden Partialsysteme durch A_{0k} bezeichnen, so daß

$$(4.) \qquad \begin{cases} A_{i0} = A_{i1} + A_{i2} + \cdots A_{i\varrho} \\ A_{0k} = A_{1k} + A_{2k} + \cdots A_{\varrho k} \end{cases}$$

ist, und endlich bezeichnen wir noch das ganze System A, d. h. die Summe aller Horizontalabschnitte oder die Summe aller Vertikalabschnitte durch A_{00}, so daß also

$$(4^{a}.) \qquad \begin{cases} A_{00} = A_{10} + A_{20} + \cdots + A_{\varrho 0} \\ \quad = A_{01} + A_{02} + \cdots + A_{0\varrho} \\ \quad = \sum_{i,k} A_{ik} \end{cases}$$

ist. Dann kann in der Kompositionsgleichung

$$(C_{il}) = (A_{ik})\,(B_{kl})$$

einfacher

$$(5.) \qquad C_{il} = A_{i0}\,B_{0l}$$

gesetzt werden, und durch Spezialisierung folgt sofort, daß

$$(5^{a}.) \qquad A_{i0}\,B_{kl} = C_{il}\,, \qquad A_{ik}\,B_{0l} = C_{il}$$

ist; die allgemeine Kompositionsgleichung

$$(5^{b}.) \qquad A_{ab}\,B_{cd} = \delta_{bc} \cdot C_{ad}$$

gilt also auch, wenn beliebig viele unter den Indizes a, b, c, d gleich Null sind; nur ist dann hinzuzufügen, daß δ_{bc} stets den Wert Eins hat, sobald auch nur einer der beiden Indices (b, c) gleich Null ist; das rechts stehende Partialsystem besitzt stets die Indices a, d, ist aber dann in jedem Falle nach der Vorschrift in $(3^{b}.)$ zu berechnen.

Die von Null verschiedenen Elemente eines Partialsystems A_{ik} bilden eine Matrix von e_i Zeilen und e_k Kolonnen; ihr Rang ist also höchstens gleich der kleineren unter den beiden Zahlen e_i und e_k, welche durch (e_i, e_k) bezeichnet werden möge. Wir nennen E_{ik} das dem System A_{ik} entsprechende Einheitssystem

$$e_i \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{e_k} \\ 0 \quad 1 \quad \dots \quad 0 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ \vdots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \end{pmatrix},$$

dessen Rang gleich (e_i, e_k) ist; dasselbe enthält auch innerhalb von A_{ik} lauter Nullen, mit Ausnahme der Elemente, welche sich auf der von links oben ausgehenden Diagonale befinden und die gleich Eins sind.

Die Diagonalsysteme A_{kk} und somit auch die zugehörigen Einheitssysteme E_{kk} sind quadratisch, und man erkennt leicht, daß stets

$$(6.) \qquad \begin{cases} A_{ik} E_{kk} = A_{ik}, \\ E_{ii} A_{ik} = A_{ik} \end{cases}$$

ist, daß also ein beliebiges Partialsystem A_{ik} durch vordere oder hintere Multiplikation mit dem zugehörigen Einheitssystem E_{ii} bezw. E_{kk} nicht geändert wird.

Ebenso leicht überzeugt man sich allgemein, daß in den beiden Gleichungen

$$(6^a.) \qquad \begin{cases} A_{hi} E_{ik} = \bar{A}_{hk} \\ E_{hi} A_{ik} = \bar{A}_{hk} \end{cases}$$

die beiden Systeme $\bar{A}_{hk}$ und $\bar{A}_{hk}$ sehr einfach aus A_{hi} bezw. A_{ik} erhalten werden.

In der ersten Gleichung geht das Partialsystem $\bar{A}_{hk}$ dadurch aus A_{hi} hervor, daß man diesem $(e_k - e_i)$ aus Nullen bestehende Vertikalreihen hinzufügt, falls $e_k > e_i$ ist, oder daß man in A_{hi} die letzten $e_i - e_k$ Vertikalreihen fortläßt, wenn $e_k \leqq e_i$ ist, und das entsprechende gilt für die beiden Partialsysteme A_{ik} und $\bar{A}_{hk}$, wenn man hier die Horizontalreihen an Stelle der Vertikalreihen setzt.

Sind A_{ab} und B_{cd} irgend zwei Partialsysteme, von denen das erste einen höheren oder den gleichen Rang hat als das zweite, so kann man bekanntlich zwei Multiplikationen $P = \Sigma P_{ik}$ und $Q = \Sigma Q_{ik}$ so bestimmen, daß

$$P A_{ab} Q = B_{cd}$$

ist. Ersetzt man aber die Systeme P und Q durch die Summe ihrer Partialsysteme und beachtet, daß dann auf der rechten Seite alle Partialsysteme außer B_{cd} gleich Null sind, so ergibt sich durch Vergleichung die spezielle Gleichung

$$P_{ca} A_{ab} Q_{bd} = B_{cd}. \tag{7.}$$

Unter der über A_{ab} und B_{cd} gemachten Voraussetzung kann man also zwei *Partialsysteme* P_{ca} und Q_{bd} so bestimmen, daß die obige Kompositionsgleichung erfüllt ist.

Es sei speziell A_{ik} ein Partialsystem, dessen Rang so groß als möglich, nämlich gleich (e_i, e_k) ist. Dann kann man nach dem soeben bewiesenen Satze zwei solche Multiplikatoren P_{ii} und Q_{kk} finden, daß

$$P_{ii} A_{ik} Q_{kk} = E_{ik}$$

wird. Unter der hier gemachten Voraussetzung kann man aber auch den einen der beiden Multiplikatoren gleich 1 annehmen. Ist nämlich z. B. $e_i \geqq e_k$, also A_{ik} vom Range e_k, so kann man $Q_{kk} = 1$ annehmen, d. h. man kann A_{ik} allein durch Verbindung der Horizontalreihen in das Einheitssystem E_{ik} überführen. In der Tat muß ja zunächst in der ersten Kolonne V_1 mindestens ein von Null verschiedenes Element auftreten, da anderenfalls A_{ik} von niedrigerem als dem e_k-ten Range wäre. Dieses Element bringen wir durch *Zeilen*vertauschungen an die erste Stelle, machen es durch Division dieser Zeile durch eine Konstante zu Eins und machen hierauf alle Elemente der ersten Kolonne außer dem ersten zu Null. Betrachten wir nun alle Elemente der zweiten Vertikalreihe V_2, außer dem ersten, so muß auch unter diesen ein von Null verschiedenes sein, da sonst alle Determinanten der e_k-ten Ordnung von A_{ik} Null wären. Bringen wir dieses an die zweite Stelle der zweiten Vertikalreihe und machen es dann zu Eins, so können wir genau wie vorher alle unter ihm stehenden Elemente. aber auch das eine darüber stehende Element von V_2 zu Null machen, und in derselben Weise so lange fortfahren, bis A_{ik} in E_{ik} übergegangen ist. Unter der hier gemachten Voraussetzung besteht also stets eine Gleichung

$$P_{ii} A_{ik} = E_{ik}. \tag{8.}$$

Wir wollen nun diese wenigen Sätze aus der Theorie der Partialsysteme zur Transformation des Körpers $K(1, A)$ in den äquivalenten reduzierten Körper benutzen.

§ 4.

Wir wollen nun mit Hilfe von sukzessiven kontragredienten Elementartransformationen ein System A auf eine reduzierte Form bringen.

Die einfachsten Kompositionssysteme sind die sog. Vertauschungssysteme $P^{(\alpha,\beta)}$, welche aus dem Einheitssysteme durch Vertauschung der beiden Zeilen H_α und H_β oder, was offenbar dasselbe ist, der Kolonnen V_α und V_β hervorgeht. So ist z. B.

$$P^{(1,2)} = \begin{vmatrix} 0\,1\,0\,\ldots\,0 \\ 1\,0\,0\,\ldots\,0 \\ 0\,0\,1\,\ldots\,0 \\ \vdots \\ 0\,0\,0\,\ldots\,1 \end{vmatrix}.$$

Da offenbar

$$\left(P^{(\alpha,\beta)}\right)^2 = 1$$

ist, so ist

$$\left(P^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1} = P^{(\alpha,\beta)},$$

und durch die kontragrediente Transformation

$$P^{(\alpha,\beta)}\, A\, P^{(\alpha,\beta)}$$

geht A in ein äquivalentes System $\bar{A}$ über, welches aus A durch simultane Vertauschung von H_α und H_β einerseits und V_α und V_β andererseits hervorgeht.

Ein System A geht also in ein äquivalentes über, wenn man in ihm beliebig viele Kolonnenvertauschungen und zugleich die entsprechenden Zeilenvertauschungen vornimmt.

Es sei nun das vorgelegte System n-ter Ordnung A vom Range n_1, so kann man durch geeignete Kolonnenvertauschungen unter gleichzeitiger Ausführung derselben Zeilenvertauschungen erreichen, daß in dem neuen äquivalenten Systeme das aus den n_1 letzten Vertikalreihen gebildete Partialsystem denselben Rang n_1 hat, daß also mindestens eine seiner Determinanten n_1-ter Ordnung von Null verschieden ist. Wir können und wollen daher gleich voraussetzen, daß A selbst bereits diese Eigenschaft habe.

Wir sondern dann von diesem System A einen ersten Vertikalstreifen A_{01} und einen ersten Horizontalstreifen A_{10} ab, welche bezw. aus den $n-n_1$ ersten Kolonnen und den $n-n_1$ ersten Zeilen bestehen, so daß

$$A_{01} = (V_1, V_2, \ldots, V_{n-n_1})$$
$$A_{10} = (H_1, H_2, \ldots, H_{n-n_1})$$

ist. Dann besitzen also die beiden Systeme A und $A - A_{01}$ gleichen Rang n_1, d. h. es besteht die Gleichung

(1.) $$[A] = [A - A_{01}].$$

Wir bezeichnen nun das nach Weglassung der $n-n_1$ ersten Zeilen und Kolonnen übrig bleibende Partialsystem n_1-ter Ordnung von A durch $A^{(11)}$ und behandeln dasselbe genau ebenso, wie soeben das ganze System A. Es besitze also $A^{(11)}$ den Rang n_2; dann ist $n_2 < n_1$ oder $n_2 = n_1$. Ist das Letztere der Fall, so ist unser Verfahren abgeschlossen. Ist dagegen $n_2 < n_1$, so können wir wieder durch simultane Zeilen- und Kolonnenvertauschungen der n_1 letzten Zeilen und Kolonnen von A erreichen, daß das aus den letzten n_2 Kolonnen gebildete Partialsystem von $A^{(11)}$ genau vom Range n_2 ist. Wir sondern alsdann von dem *ganzen* System A einen zweiten Vertikalstreifen A_{02} und einen zweiten Horizontalstreifen A_{20} ab, welche bezw. aus den $n_1 - n_2$ folgenden Kolonnen und Zeilen besteht, so daß also

$$A_{02} = (V_{n-n_1+1}, \ldots, V_{n-n_2})$$
$$A_{20} = (H_{n-n_1+1}, \ldots, H_{n-n_2})$$

ist. Dann besitzen also die beiden Systeme $A^{(11)}$ und $A^{(11)} - A_{02}^{(11)}$ denselben Rang n_2, d. h. es besteht die Gleichung

(1ª.) $$[A^{(11)}] = [A^{(11)} - A_{02}^{(11)}],$$

welche sich von (1.) nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle des Systemes n-ter Ordnung A das Partialsystem n_1-ter Ordnung $A^{(11)}$ getreten ist.

Bezeichnen wir nun das aus $A^{(11)}$ durch Weglassung seiner $n_1 - n_2$ ersten Zeilen und Kolonnen entstehende Partialsystem n_2-ter Ordnung durch $A^{(22)}$, formen dieses wieder so um, daß

(1ᵇ.) $$[A^{(22)}] = [A^{(22)} - A_{03}^{(22)}]$$

ist, und fahren in derselben Weise fort, so gelangen wir zuletzt zu einem quadratischen Partialsystem $A^{(\varrho\varrho)}$ von n_ϱ^2 Elementen, welches genau vom Range n_ϱ ist; es kann aber auch $n_\varrho = 0$ sein. Alsdann bestehen für diese Systeme die Gleichungen

$$(1^c.) \qquad [A^{(i,i)}] = [A^{(i,i)} - A^{(i,i)}_{0,i+1}]. \qquad (i = 0, 1, \ldots, \varrho)$$

Ich zeige jetzt weiter, daß man das System A sukzessive kontragredient so transformieren kann, daß an die Stelle der obigen Gleichungen für den Rang jener Partialsysteme die entsprechenden Gleichungen

$$(1^d.) \qquad A^{(ii)} = A^{(ii)} - A^{(ii)}_{0,i+1}$$

für die Systeme selbst, oder, was dasselbe ist, die Gleichungen

$$(1^e.) \qquad A^{(ii)}_{0,i+1} = 0$$

treten. Da alle jene Gleichungen in genau derselben Weise gebildet sind, so genügt es, jenen Beweis für das System A selbst zu führen, d. h. zu zeigen, daß man, falls

$$[A] = [A - A_{01}]$$

ist, ein System Q so finden kann, daß für das transformierte System

$$\bar{A} = Q^{-1} A Q$$

$$\bar{A} = \bar{A} - \bar{A}_{01} \quad \text{oder} \quad \bar{A}_{01} = 0$$

ist. Dieser Beweis ist nun sehr leicht zu führen. Besitzen nämlich A und $A - A_{01}$ gleichen Rang, so kann man zwei Multiplikatoren P und Q so finden, daß

$$PAQ = A - A_{01}$$

ist. Multipliziert man diese Gleichung aber vorn mit

$$S_{00} = Q^{-1} P^{-1},$$

so ergibt sich nach (5^b.) auf Seite 132

$$\begin{aligned} \bar{A} = Q^{-1} A Q = S_{00}(A - A_{01}) = S_{00}(A_{02} + \cdots + A_{0\varrho}) \\ = \bar{A}_{02} + \cdots + \bar{A}_{0\varrho} \\ = \bar{A} - \bar{A}_{01}, \end{aligned}$$

wenn $S_{00} A_{0i} = \bar{A}_{0i}$ gesetzt wird; es ist also in der Tat $\bar{A}_{01} = 0$, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir bezeichnen jetzt die ϱ^2 Partialsysteme, in welche A durch die oben angegebenen ϱ Horizontal- und die ϱ Vertikalabschnitte zerlegt wird, wieder durch A_{ik}. Dann folgt aus der soeben bewiesenen Gleichung $\bar{A}_{01} = 0$, daß

$$\bar{A}_{11} = \bar{A}_{21} = \cdots = \bar{A}_{\varrho 1} = 0$$

In derselben Weise können wir nun durch eine weitere Transformation erreichen, daß außerdem

$$\bar{A}_{22} = \cdots = \bar{A}_{\varrho^2} = 0$$

ist u. s. w. Bezeichnen wir also das durch diese sukzessiven Transformationen sich ergebende System wieder durch A, so ergibt sich der Satz:

Jedes System kann durch kontragrediente Transformation auf die Form

$$(2.) \qquad A = \begin{pmatrix} 0, A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{1\varrho} \\ 0, \ 0, \ A_{23}, \ldots, A_{2\varrho} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ 0 \ \ 0 \cdot \ \cdot \ \cdot \ A_{\varrho-1,\varrho} \\ 0, \ 0, \ \ 0, \ \ldots, A_{\varrho\varrho} \end{pmatrix}$$

oder in anderer Weise geschrieben auf die Form

$$(2^a.) \qquad A = \sum_{\alpha<\beta} A_{\alpha\beta} + A_{\varrho\varrho}$$

gebracht werden, wo $|A_{\varrho\varrho}| \gtrless 0$ ist; es sei denn, daß $A_{\varrho\varrho} = 0$ ist, daß jenes letzte Partialsystem also identisch verschwindet.

§ 5.

Zur weiteren Vereinfachung des obigen Systemes (2.) fassen wir jetzt seine $(\varrho-1)$ ersten Horizontal- und Vertikalstreifen in einen Streifen zusammen; dann können wir dasselbe einfach so schreiben:

$$(1.) \qquad A = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}, \mathfrak{A}_{12} \\ 0, \ \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix},$$

wo

$$(1^a.) \qquad \mathfrak{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0, A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{1\varrho-1} \\ 0 \ \ 0 \ \ A_{23}, \ldots, A_{2,\varrho-1} \\ \vdots \\ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ \ \ 0 \end{pmatrix} = \sum_{\alpha<\beta=1}^{\varrho-1} A_{\alpha\beta},$$

$$\mathfrak{A}_{12} = A_{1\varrho} + \cdots + A_{\varrho-1,\varrho}, \qquad \mathfrak{A}_{22} = A_{\varrho\varrho},$$

und wo entweder $|\mathfrak{A}_{22}| \gtrless 0$ oder $\mathfrak{A}_{22} = 0$ ist. Dann erkennt man sofort, daß für die Komposition von zwei solchen Systemen die Gleichung gilt

$$(2.) \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}, \mathfrak{A}_{12} \\ 0, \ \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{12} \\ 0, \ \mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{11}, & \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{22} \\ 0, & \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix};$$

und hieraus folgt leicht, daß für eine beliebige r-te Potenz von A die Gleichung besteht:

$$(2^{a}.) \qquad A^r = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}, & \mathfrak{A}_{12} \\ 0, & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}^r, & \overline{\mathfrak{A}}_{12}^{(r)} \\ 0, & \mathfrak{A}_{22}^r \end{pmatrix}$$

wo $\overline{\mathfrak{A}}_{12}^{(r)}$ ein Partialsystem bedeutet, welches für jeden Exponenten r leicht gebildet werden kann; so ist z. B. für $r = 2$

$$(2^{b}.) \qquad \overline{\mathfrak{A}}_{12}^{(2)} = \mathfrak{A}_{11}\,\mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_{12}\,\mathfrak{A}_{22}.$$

Ich bemerke gleich, daß, sobald $r \geqq \varrho$ ist,

$$(2^{c}.) \qquad \mathfrak{A}_{11}^r = 0$$

sein muß. In der Tat ist ja:

$$\mathfrak{A}_{11}^r = (A_{12} + A_{13} + A_{23} + \cdots + A_{\varrho-2,\,\varrho-1})^r$$
$$= \Sigma\, A_{\alpha\beta} \cdot A_{\beta\gamma} \cdot A_{\gamma\delta} \ldots A_{\varepsilon\zeta}$$

ist, wo sich die Summation auf alle Produkte dieser Art von je r Faktoren erstreckt, für welche

$$\alpha < \beta < \gamma \cdots < \varepsilon < \zeta$$

ist, und wo alle jene Indices Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, \varrho - 1$ sind. Ist aber $r > \varrho - 1$, so gibt es kein solches Produkt; jene Potenz ist dann also gleich Null.

In unserem normalen Fundamentalsystem (19.) auf S. 127 treten nun allein solche Systeme auf, für welche entweder

$$A^r = A \qquad \text{oder} \qquad A^r = 0$$

ist, nämlich die Systeme $A_i^{(0)}$ und die Systeme A_i. Es sei zuerst $A^r = A$; dann zeigt man leicht, daß in (1.) $\mathfrak{A}_{11} = 0$ sein muß; denn für ein genügend großes r folgt ja dann aus $(2^{a}.)$ und $(2^{c}.)$ die Gleichung:

$$A^r = \begin{pmatrix} 0, & \overline{\mathfrak{A}}_{12}^{(r)} \\ 0, & \mathfrak{A}_{22}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}, & \mathfrak{A}_{12} \\ 0, & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} = A.$$

Also ergibt sich in der Tat

$$\mathfrak{A}_{11} = 0, \qquad \mathfrak{A}_{22}^r = \mathfrak{A}_{22}.$$

Ist speziell, wie bei unseren Systemen auf S. 127 schon $A^2 = A$, so muß $\mathfrak{A}_{22}$ gleich dem zugehörigen Einheitssysteme $\mathfrak{E}_{22}$ sein; denn aus der Gleichung

$$\mathfrak{A}_{22}^2 - \mathfrak{A}_{22} = \mathfrak{A}_{22}\,(\mathfrak{A}_{22} - \mathfrak{E}_{22}) = 0$$

folgt, falls $\mathfrak{A}_{22} \gtrless 0$ ist, also wie oben bewiesen wurde, auch $|\mathfrak{A}_{22}|$ nicht Null ist, daß $\mathfrak{A}_{22} = \mathfrak{E}_{22}$ sein muß. Wäre aber auch $\mathfrak{A}_{22} = 0$, so würde aus der Gleichung $A^2 = A$ wegen (2^b.) auch $A_{12} = 0$, also gegen unsere Annahme $A = 0$ sich ergeben.

Wir können also den folgenden Satz aussprechen:

Jedes System, welches der Gleichung $A^2 = A$ genügt, ist äquivalent einem defekten Einheitssystem von gleichem Range.

Es sei jetzt zweitens $A^r = 0$. Dann folgt für $r \geqq \varrho$

$$A^r = \begin{pmatrix} 0, \mathfrak{A}_{12}^{(r)} \\ 0 \quad \mathfrak{A}_{22}^r \end{pmatrix} = 0,$$

d. h. es ist $\mathfrak{A}_{22}^r = 0$, und hieraus folgt, daß $\mathfrak{A}_{22} = 0$ sein muß, da sonst n. d. V. $|\mathfrak{A}_{22}| \gtrless 0$ wäre, und somit nicht eine Potenz von $\mathfrak{A}_{22}$ verschwinden könnte. Es gilt also hier der Satz:

Jedes System, von dem eine Potenz verschwindet, ist äquivalent einem System von der Form:

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1\varrho} \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & A_{2\varrho} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{\varrho-1,\varrho} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

welches also nur oberhalb der Diagonale von Null verschiedene Partialsysteme enthält; auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig, wie in (2^c.) bewiesen wurde.

§ 6.

Wir benutzen nun zunächst das erste der beiden im vorigen Abschnitte hergeleiteten Resultate, um die h Systeme

$$A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \dots, A_h^{(0)}$$

simultan in h defekte Einheitssysteme kongruent zu transformieren.

Es sei zuerst $A_1^{(0)}$ vom Range μ_1. Dann kann man $A_1^{(0)}$ durch kongruente Transformation in ein defektes Einheitssystem E_{11} von gleichem Range transformieren, und durch Reihenvertauschungen seine μ_1 Elemente 1 an die μ_1 ersten Stellen bringen. Wir denken uns diese Transformation von $K(1, A)$ von vornherein ausgeführt, und wir denken uns jedes System

B des Körpers so in vier Partialsysteme

$$\begin{pmatrix} B_{11}, & B_{12} \\ B_{21}, & B_{22} \end{pmatrix}$$

zerlegt, daß B_{11} aus den μ_1 ersten Zeilen und Kolonnen besteht; dann ist

$$A_1^0 = E_{11}.$$

Es sei nun erstens $\bar{A}$ irgend eines der d_1 Elemente der Reihe $A_1^0, A_1, \ldots, A_1^{d_1-1}$, und es sei

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11}, & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21}, & \bar{A}_{22} \end{pmatrix};$$

dann folgt aus dem Bestehen der im § 1 bewiesenen Gleichung:

$$E_{11}\,\bar{A}\,E_{11} = \bar{A},$$

daß $\bar{A}_{12} = \bar{A}_{21} = \bar{A}_{22} = 0$, daß also $\bar{A} = \bar{A}_{11}$ ist.

Es sei jetzt zweitens $\bar{A}$ irgend eines der nicht zur ersten Reihe gehörigen Elemente A_i^k des normalen Fundamentalsystemes (19.) auf S. 127, dann bestehen für dieses die Gleichungen

$$A_1^0\,\bar{A} = \bar{A}\,A_1^0 = 0,$$

oder ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} E_{11}, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{A}_{11}, & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11}, & \bar{A}_{12} \\ 0, & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{11}, & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21}, & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{11}, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11}, & 0 \\ \bar{A}_{21}, & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

d. h., es ist $\bar{A}_{11} = \bar{A}_{12} = \bar{A}_{21} = 0$, also

$$\bar{A} = \bar{A}_{22}.$$

Es gilt also der Satz:

Ist

$$\begin{aligned} &A_1^0,\ A_1, \ldots A_1^{d_1-1} \\ &A_2^0,\ A_2, \ldots A_2^{d_2-1} \\ &\vdots \\ &A_h^0,\ A_h, \ldots A_h^{d_h-1} \end{aligned}$$

das normale Fundamentalsystem für den Körper $K(1, A)$, und transformiert man A_1^0 kongruent in das defekte Einheitssystem E_{11} vom

gleichen Range, so gehen durch diese Transformation die Systeme der ersten Reihe in Partialsysteme A_{11}, die Systeme aller übrigen Reihen in Partialsysteme A_{22} über.

Ist nun A_2^0 vom Range μ_2, so kann man dieses System, ohne das bisher erlangte Resultat zu ändern, in das äquivalente defekte Einheitssystem vom Range μ_2 transformieren, dessen Diagonalelemente sich an diejenigen von E_{11} unmittelbar anschließen; ich bezeichne dieses jetzt durch E_{22}; dann gehen die Elemente der zweiten Reihe von selbst in entsprechende Partialsysteme A_{22} über, während die Systeme A_i^k der folgenden $h-2$ Reihen mit E_{11} und E_{22} weder eine Zeile, noch eine Kolonne gemeinsam haben. Fährt man in derselben Weise fort, so ergibt sich, daß man die h Systeme $A_1^0, \ldots, A_h^0$ simultan in h defekte Einheitssysteme

$$E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{hh}$$

transformieren kann, welche kein Element gemeinsam haben, und daß durch diese Transformation von selbst die Systeme $A_i\, A_i^2 \ldots A_i^{d_i-1}$ in Partialsysteme A_{ii} übergehen, so daß also zwei solche Systeme A_i^h und A_k^l keine Zeile und keine Kolonne gemeinsam haben. Aus der Gleichung

$$E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{hh} = 1$$

folgt endlich die Gleichung

$$[A_1^0] + [A_2^0] + \cdots + [A_h^0] = n. \tag{1.}$$

Jeder Körper $K(1, A)$ ist also äquivalent einem anderen, in welchem die Elemente

$$A_i^0\, A_i \ldots A_i^{d_i-1} \tag{2.}$$

und

$$A_k^0\, A_k \ldots A_k^{d_k-1} \tag{2ª.}$$

zweier Reihen der Normalbasis verschiedenen Partialsystemen angehören.

Wir können und wollen daher von jetzt an den Körper $K(1, A)$ so gewählt voraussetzen.

Da sich somit die weitere Transformation einer solchen Reihe (2.) ganz unabhängig von den übrigen ausführen läßt, so kann ich, ohne die Allgemeinheit dadurch zu beschränken, jetzt annehmen, daß der Körper $K(1, A)$ nur ein einreihiges Fundamentalsystem besitzt.

§ 7.

Es sei also jetzt A ein quadratisches System n-ter Ordnung, welches der zugehörigen Gleichung niedrigsten Grades

$$A^d = 0 \tag{1.}$$

genügt. Dann besitzt der Körper $K(1, A)$ das Fundamentalsystem:

$$1, A, A^2, \ldots, A^{d-1}.$$

Wir denken uns jetzt nach der im § 4 angegebenen Methode A a priori kongruent so transformiert, daß

$$A = \begin{pmatrix} 0, A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{1\varrho} \\ 0, \ 0, \ A_{23}, \ldots, A_{2\varrho} \\ \vdots \\ 0, \ 0, \ \ 0, \ \ldots, A_{\varrho-1,\varrho} \\ 0, \ 0, \ \ 0, \ \ldots, \ \ 0 \end{pmatrix} \tag{2.}$$

ist; denn aus der Gleichung (1.) folgt ja, daß $A_{\varrho\varrho} = 0$ sein muß. Es bestehe wieder allgemein A_{ik} aus e_i Zeilen und e_k Kolonnen, d. h. es enthalte der erste, zweite, ... ϱ-te Horizontal- bezw. Vertikalstreifen bezw. $e_1, e_2, \ldots, e_\varrho$ Reihen.

Setzen wir wieder allgemein:

$$A^{(ii)} = \begin{pmatrix} 0, A_{i+1,i+2}, A_{i+1,i+3}, \cdots, A_{i+1,\varrho} \\ 0, \quad 0, \quad A_{i+2,i+3}, \cdots, A_{i+2,\varrho} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0 \end{pmatrix}, \tag{2ª.}$$

so war der Rang dieses Partialsystemes nach (1ᶜ.) auf S. 137

$$[A^{(ii)}] = [A^{(ii)} - A^{(ii)}_{0,i+1}] = e_{i+2} + e_{i+3} + \cdots + e_\varrho, \tag{3.}$$

so daß also der Rang von A selbst durch die Gleichung

$$[A] = e_2 + e_3 + \cdots + e_\varrho \tag{3ª.}$$

gegeben ist. Jede Determinante der $(e_2 + \cdots + e_\varrho)$-ten Ordnung des Systemes A in (2.) kann aber nach dem *Laplace*schen Determinantensatze als eine Summe von Produkten

$$D_{12} D_{3 \ldots \varrho}$$

dargestellt werden, deren erster Faktor jedesmal eine Determinante von A_{12}, während der zweite eine Determinante $(e_3+\cdots+e_\varrho)$-ter Ordnung des komplementären Systemes ist, welches aus den $(e_3+\cdots+e_\varrho)$ letzten Vertikalreihen besteht. Da aber in A mindestens eine Determinante $(e_2+\cdots+e_\varrho)$-ter Ordnung nicht verschwindet, so muß mindestens eine Determinante e_2-ter Ordnung D_{12} von A_{12} von Null verschieden sein; d. h. das Partialsystem A_{12} ist genau vom Range e_2. Ganz ebenso beweist man, daß die in der ersten Diagonalreihe von A stehenden Partialsysteme

$$A_{12}, A_{23}, \ldots, A_{\varrho-1,\varrho}$$

bzw. genau vom Range

$$e_2, \quad e_3, \ldots, \quad e_\varrho$$

sind. Ist aber das System A_{12} von e_1 Zeilen und e_2 Kolonnen genau vom Range e_2, so muß offenbar $e_1 \geqq e_2$ sein; und durch die entsprechenden Überlegungen für $A_{23}, \ldots$ erhält man die fundamentalen Ungleichungen

$$e_1 \geqq e_2 \geqq e_3 \geqq \ldots \geqq e_\varrho. \tag{4.}$$

Wir wollen nun eine kongruente Transformation angeben, durch welche das System A in die einfachere Form

$$\begin{Vmatrix} 0, A_{12}, 0, & \ldots 0 \\ 0, 0, & A_{23}, \ldots 0 \\ \vdots & \\ 0, 0, & 0, \quad \ldots A_{\varrho-1,\varrho} \\ 0, 0, & 0, \quad \ldots 0 \end{Vmatrix} = A_{12}+A_{23}+\cdots+A_{\varrho-1,\varrho}$$

transformiert wird. Wir verfahren hierbei sukzessive, indem wir der Reihe nach die Systeme $A^{(ii)}$ in (2^a.) von hinten anfangend auf die Form

$$A^{(ii)} = A_{i+1,i+2}+A_{i+2,i+3}+\cdots+A_{\varrho-1,\varrho}$$

bringen. Wir nehmen also an, jene Reduktion sei bereits für $A^{(ii)}$ gemacht, und beweisen, daß sie auch für das nächsthöhere System $A^{(i-1,i-1)}$ ausgeführt werden kann. Da das kleinste System

$$A^{(\varrho-2,\varrho-2)} = \begin{pmatrix} 0, & A_{\varrho-1,\varrho} \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

schon von selbst diese reduzierte Form hat, so ist damit dann der verlangte Beweis vollständig erbracht. Da alle jene Systeme $A^{(ii)}$ durchaus gleich-

artig gebildet sind, so führen wir jenen Beweis gleich für das vorgelegte System A selber, unter der Voraussetzung, daß jene Reduktion für das nächste System $A^{(11)}$ bereits ausgeführt sei; d. h. wir führen jenen Beweis für ein System:

$$(5.) \qquad A = \begin{vmatrix} 0, A_{12}, A_{13}, A_{14}, \ldots, A_{1\varrho} \\ 0, 0, \quad A_{23}, 0, \quad \ldots, 0 \\ 0, 0, \quad 0, \quad A_{34}, \ldots, 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0, 0, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, A_{\varrho-1,\varrho} \\ 0, 0, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, 0 \end{vmatrix}.$$

Es sei nun von den Systemen der ersten Zeile $A_{1,i+1}$ das letzte von Null verschiedene, so daß also:

$$(5^a.) \qquad \begin{cases} A = A_{12} + A_{13} + \cdots + A_{1i+1} \\ \qquad\quad + A_{23} + \cdots + A_{ii+1} + \cdots + A_{\varrho-1,\varrho} \end{cases}$$

ist, so zeige ich jetzt, daß man ein Partialsystem P_{1i} so bestimmen kann, daß durch die kontragrediente Transformation

$$(1-P_{1i})\, A\, (1+P_{1i})$$

A in ein System derselben Art übergeht, in dem nur das Element A_{1i+1} gleich Null geworden ist. Ist dieser Beweis geführt, so kann man durch Fortsetzung dieses Verfahrens der Reihe nach alle Elemente

$$A_{1,i+1}, A_{1i}, \ldots, A_{13}$$

zu Null machen, und so unseren Satz beweisen. Nun ist aber:

$$(1-P_{1i})\, A\, (1+P_{1i}) = (1-P_{1i})\, A = A - P_{1i}\, A_{i,i+1},$$

weil A keinen zweiten Index 1 enthält; wir brauchen also P_{1i} nur so zu bestimmen, daß

$$P_{1i}\, A_{i,i+1} = A_{1,i+1}$$

wird. Diese Gleichung ist aber stets lösbar. Da nämlich, wie oben bewiesen, $A_{i,i+1}$ genau vom Range e_{i+1}, also äquivalent $E_{i,i+1}$ ist, so kann man nach (8.) auf S. 134 zuerst ein solches System R_{ii} finden, daß

$$R_{ii}\, A_{i,i+1} = E_{i,i+1}$$

ist. Hierauf kann man, nach den zu (6ª.) auf S. 133 gemachten Bemerkungen, ein System S_{1i} finden, für welches:

$$S_{1i} E_{i,i+1} = A_{1,i+1}$$

ist; dann folgt aus den beiden letzten Gleichungen, daß für:

$$P_{1i} = S_{1i} R_{ii}$$

in der Tat

$$P_{1i} A_{i,i+1} = S_{1i} R_{ii} A_{i,i+1} = A_{1,i+1}$$

ist; und damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Endlich können wir noch das System

$$A = A_{12} + A_{23} + \cdots + A_{\varrho-1,\varrho}$$

in das entsprechende Einheitssystem:

$$E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{\varrho-1,\varrho}.$$

transformieren. Sind nämlich

$$P_{11}, P_{22}, \ldots, P_{\varrho-1,\varrho-1}$$

$\varrho-1$ geeignet gewählte Partialsysteme mit nicht verschwindenden Partialdeterminanten und

$$P_{11}^{-1}, P_{22}^{-1}, \ldots, P_{\varrho-1,\varrho-1}^{-1}$$

die reziproken Partialsysteme, so sind die beiden Systeme:

$$P_{11} + P_{22} + \cdots + P_{\varrho-1,\varrho-1} + E_{\varrho\varrho}$$

und

$$P_{11}^{-1} + P_{22}^{-1} + \cdots + P_{\varrho-1,\varrho-1}^{-1} + E_{\varrho\varrho}$$

offenbar reziprok, weil ihr Produkt gleich

$$E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{\varrho\varrho} = 1$$

ist. Dann kann man aber jene Partialsysteme leicht so bestimmen, daß:

$$(P_{11} + \cdots + P_{\varrho-1,\varrho-1} + E_{\varrho\varrho})(A_{12} + \cdots + A_{\varrho-1,\varrho})(P_{11}^{-1} + \cdots + P_{\varrho-1,\varrho-1}^{-1} + E_{\varrho\varrho})$$
$$= E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{\varrho-1,\varrho}$$

wird. Führt man nämlich jene Multiplikation aus und läßt alle verschwindenden Produkte fort, so bleiben nur die folgenden Gleichungen übrig:

$$\begin{aligned}
P_{11}\,A_{12}\,P_{22}^{-1} &= E_{12},\\
P_{22}\,A_{23}\,P_{33}^{-1} &= E_{23},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
P_{\varrho-2,\varrho-2}\,A_{\varrho-2,\varrho-1}\,P_{\varrho-1,\varrho-1}^{-1} &= E_{\varrho-2,\varrho-1},\\
P_{\varrho-1,\varrho-1}\,A_{\varrho-1,\varrho} &= E_{\varrho-1,\varrho}.
\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung bestimmt sich nach (8.) auf S. 134 $P_{\varrho-1,\varrho-1}$, und zwar so, daß $|P_{\varrho-1,\varrho-1}| \gtrless 0$ ist. Aus der vorletzten Gleichung ergibt sich dann $P_{\varrho-2,\varrho-2}$ u. s. w.; unsere Behauptung ist somit vollständig bewiesen.

In dem transformierten Körper, den wir jetzt wieder mit $K(1, A)$ bezeichnen wollen, ist also das Element A, und außerdem, wie man leicht sieht, seine Potenzen folgendermaßen dargestellt:

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathbf{1} &= E_{11}+E_{22}+E_{33}+\cdots+E_{\varrho\varrho},\\
A &= E_{12}+E_{23}+\cdots+E_{\varrho-1,\varrho},\\
A^2 &= E_{13}+\cdots+E_{\varrho-2,\varrho},\\
&\vdots\\
A^{\varrho-1} &= E_{1\varrho},\\
A^{\varrho} &= 0,
\end{aligned}\right.$$

weil z. B.

$$\begin{aligned}
A^2 &= (E_{12}+E_{23}+\cdots+E_{\varrho-1,\varrho})^2 = E_{12}\,E_{23}+E_{23}\,E_{34}+\cdots\\
&= E_{13}+E_{24}+E_{35}+\cdots+E_{\varrho-2,\varrho}
\end{aligned}$$

ist u. s. w.

Hieraus folgt zunächst, daß $d = \varrho$, daß also die zu A gehörige Gleichung diese ist:

$$A^{\varrho} = 0,$$

weil A^{ϱ} die niedrigste Potenz von A ist, welche verschwindet.

Zweitens erkennt man sofort, daß die Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_{\varrho}$ Invarianten des Körpers $K(1, A)$ sind, daß man also bei einer anderen Art der Transformation nicht etwa zu einem reduzierten Fundamentalsystem gelangen kann, bei welchem jene Zahlen e_i andere Zahlenwerte haben. Geht man nämlich in den Gleichungen (6.) auf beiden Seiten zum Range über, so ergeben sich die Relationen:

$$\begin{aligned}
[1] &= e_1+e_2+e_3+\cdots+e_\varrho = n\\
[A] &= \quad e_2+e_3+\cdots+e_\varrho\\
[A^2] &= \quad\quad e_3+\cdots+e_\varrho\\
&\vdots\\
[A^{\varrho-1}] &= \quad\quad\quad e_\varrho,
\end{aligned}$$

d. h. es ist

$$(6^a.)\qquad \begin{cases} e_1 = [1]-[A]\\ e_2 = [A]-[A^2]\\ \vdots\\ e_\varrho = [A^{\varrho-1}]. \end{cases}$$

Da aber durch eine beliebige kongruente Transformation der Rang der Potenzen von A nicht geändert wird, so ist der Beweis für die Invarianz der ganzen Zahlen e_i erbracht.

Ist allgemein A ein beliebiges System, und sind

$$A_i^0, A_i, A_i^2, \ldots, A_i^{\varrho_i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,h)$$

die ν Elemente der Normalbasis für den zugehörigen Körper $K(1, A)$, so sind die zugehörigen charakteristischen Zahlen:

$$e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)}, \ldots, e_{\varrho_i}^{(i)}$$

durch die Gleichungen

$$(6^b.)\qquad \begin{cases} e_1^{(i)} = [A_i^0] \quad -[A_i]\\ e_2^{(i)} = [A_i] \quad -[A_i^2]\\ \vdots\\ e_{\varrho_i}^{(i)} = [A_i^{\varrho_i-1}]-[A_i^{\varrho_i}] = [A_i^{\varrho_i-1}] \end{cases}$$

als Invarianten von $K(1, A)$ bestimmt.

Mit Hülfe dieser Zahlen können wir nun auch die Determinante des Systemes $(r-A)$ so zerlegen, daß die Invarianten $e_k^{(i)}$ unmittelbar in Evidenz gesetzt werden. Aus der auf S. 124 unten angegebenen Darstellung

$$A = \sum_{i=1}^{h}(r_i A_i^0 + A_i)$$

ergibt sich nämlich die Gleichung

$$\begin{aligned}
r-A = &((r-r_1)A_1^0-A_1)+((r-r_2)A_2^0-A_2)+\cdots\\
&+((r-r_h)A_h^0-A_h).
\end{aligned}$$

Denkt man sich nun von vornherein das System A kontragredient auf die reduzierte Form transformiert, wodurch die obige Gleichung ja nicht geändert wird, so werden die Systeme A_i^0 defekte Einheitssysteme vom Range

$$e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \cdots + e_{\varrho_i}^{(i)},$$

und man erkennt leicht, daß man für $|r-A|$ die folgende Darstellung erhält:

$$(5.) \qquad \begin{cases} |r-A| = \Pi (r-r_i)^{e_1^{(i)} + \cdots + e_{\varrho_i}^{(i)}} \\ \qquad\quad = \prod_{i=1}^{h} \prod_{k=1}^{\varrho_i} (r-r_i)^{e_k^{(i)}}. \end{cases}$$

Diese Zerlegung der Determinante $|r-A|$, welche sowohl die Wurzeln $r_1, \ldots r_h$ der zugehörigen Gleichung, als auch die ihnen zugehörigen charakteristischen Zahlen $e_k^{(i)}$ in Evidenz treten läßt, will ich die *charakteristische Zerlegung jener Determinante* nennen; die Linearfaktoren für dieselbe bestimmen sich als die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $|r-A| = 0$, während die einzelnen Exponenten $e_k^{(i)}$ nach (4^b.) durch die Rangzahlen der Systeme der Normalbasis von $K(1, A)$ eindeutig bestimmt sind.

Zwei Gattungsbereiche $K(1, A)$ und $K(1, B)$ sind dann und nur dann äquivalent, wenn die charakteristische Zerlegung der beiden Determinanten $|r-A|$ und $|r-B|$ entsprechende Faktoren gleichen Grades ergibt. Sind nämlich:

$$|r-A| = \prod_i \prod_k (r-r_i)^{e_k^{(i)}}$$

$$|s-B| = \prod_i \prod_k (s-s_i)^{e_k^{(i)}}$$

jene beiden Zerlegungen, so gehören zu jedem zugeordneten Paar von Linearfaktoren $r-r_i$ und $s-s_i$ Fundamentalsysteme

$$A^0, A_i, \ldots A_i^{\varrho_i - 1}, \qquad B_i^0, B_i, \ldots B_i^{\varrho_i - 1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

deren Elemente gleichen Rang haben, welche somit simultan kontragredient ineinander transformiert werden können. Und da umgekehrt jene Bedingung auch offenbar notwendig ist, so ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

§ 8.

Wir wollen zunächst untersuchen, in welchem Zusammenhange die charakteristische Zerlegung von $|r-A|$ mit den Elementarteilern dieses Systemes steht. Da weder jene Zerlegung, noch auch die Elementarteiler

von $r-A$ durch eine kontragrediente Transformation geändert werden, so können wir für den Körper $K(1, A)$ gleich den zugehörigen reduzierten Körper wählen. Da ferner für ein in Partialsysteme zerlegbares System die Elementarteiler gleich dem Produkte der entsprechenden Elementarteiler von den einzelnen Partialsystemen sind, so können wir uns auf den Fall beschränken, daß das zu untersuchende System n-ter Ordnung der einfachen Gleichung

$$A^\varrho = 0 \tag{1.}$$

genügt, und die Form hat:

$$A = E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{\varrho-1,\,\varrho}.$$

Wir haben dann die Elementarteiler des Systemes

$$r-A = r\,(E_{11}+\cdots+E_{\varrho\varrho})-(E_{12}+\cdots+E_{\varrho-1,\,\varrho})$$

zu untersuchen, dessen charakteristische Zerlegung also gleich:

$$|r-A| = r^n = r^{e_1}\, r^{e_2} \cdots r^{e_\varrho}$$

ist.

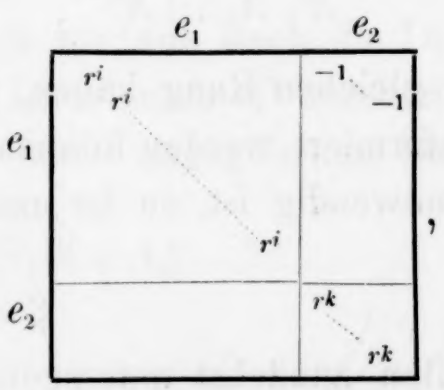
Für dieses System können nun die Elementarteiler sehr leicht dadurch berechnet werden, daß man das System $(r-A)$ in ein Diagonalsystem transformiert, dessen Diagonalelemente Potenzen

$$r^{d_1},\ r^{d_2},\ \ldots,\ r^{d_n}$$

von r sind, deren Exponenten $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ihrer Größe nach auf einander folgen. Dann sind diese Potenzen von r die gesuchten Elementarteiler des Systemes $(r-A)$.

Diese Transformation ergibt sich nun leicht mit Hülfe der folgenden einfachen Bemerkung: Wir betrachten ein Partialsystem:

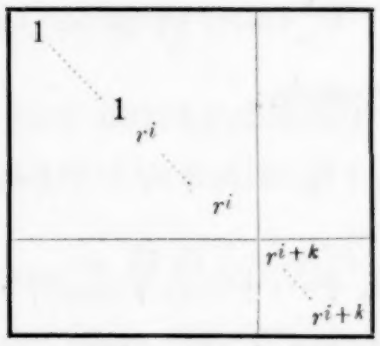
$$r^i E_{11} + r^k E_{22} - E_{12} =$$



,

wo die freigelassenen Stellen durch Nullen auszufüllen sind; addieren wir hier zuerst die e_2 mit r^k multiplizierten ersten Zeilen zu den e_2 letzten, und

addieren wir hierauf die e_2 mit r^i multiplizierten letzten Kolonnen zu den e_2 ersten, so fallen in der Diagonalreihe die e_2 ersten Elemente r^i und die e_2 letzten Elemente r^k fort, während in dem Partialsystem A_{21} noch die e_2 Diagonalelemente r^{i+k} hinzutreten. Vertauschen wir also noch die e_2 ersten Kolonnen bzw. mit den negativ genommenen e_2 letzten, so ergibt sich, daß das obige System äquivalent ist dem folgenden Diagonalsysteme:



Zur Abkürzung setzen wir das aus den e_2 ersten Elementen Eins von E_{11} bestehende Einheitssystem gleich $\mathfrak{E}_{11}$, und bezeichnen das aus den (e_1-e_2) übrig bleibenden letzten Elementen von E_{11} bestehende Einheitssystem durch $\mathfrak{E}'_{11}$. Dann kann jene Äquivalenz einfacher folgendermaßen geschrieben werden:

$$r^i E_{11} + r^k E_{22} - E_{12} \sim \mathfrak{E}_{11} + r^i \mathfrak{E}'_{11} + r^{i+k} E_{22}.$$

Transformieren wir nun in derselben Weise sukzessive das System $r-A$, und beachten dabei, daß durch jede folgende Transformation das Resultat der früheren nicht zerstört wird, so ergeben sich die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} r\ E_{11} + r E_{22} - E_{12} &\sim \mathfrak{E}_{11} + r\ \mathfrak{E}'_{11} + r^2 E_{22} \\ r^2 E_{22} + r E_{33} - E_{23} &\sim \mathfrak{E}_{22} + r^2 \mathfrak{E}'_{22} + r^3 E_{33}. \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man also zuletzt die Äquivalenz:

$$r - A \sim \mathfrak{E}_{11} + \mathfrak{E}_{22} + \cdots + \mathfrak{E}_{\varrho-1,\,\varrho-1} + r\mathfrak{E}'_{11} + r^2 \mathfrak{E}'_{22} + \cdots + r^\varrho \mathfrak{E}'_{\varrho\varrho},$$

und hier sind die Einheitssysteme

$$\mathfrak{E}_{11}, \mathfrak{E}_{22}, \ldots, \mathfrak{E}_{\varrho-1,\,\varrho-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}'_{11}, \mathfrak{E}'_{22}, \ldots, \mathfrak{E}'_{\varrho-1\,\varrho-1}\,\mathfrak{E}'_{\varrho\varrho}$$

bzw. vom Range

$$e_2, e_3, \ldots, e_\varrho \quad \text{und} \quad e_1-e_2, e_2-e_3, \ldots, e_{\varrho-1}-e_\varrho, e_\varrho.$$

Man erkennt so, daß die Anzahl der Elementarteiler:

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{gleich} & n-e_1 = e_2+e_3+\cdots+e_\varrho \\ r & \text{„} & e_1-e_2 \\ r^2 & \text{„} & e_2-e_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ r^{\varrho-1} & \text{„} & e_{\varrho-1}-e_\varrho \\ r^\varrho & \text{„} & e_\varrho \end{array}$$

ist.

Setzen wir also allgemein:

$$n = e_1+\bar{e}_1 = e_2+\bar{e}_2 = \cdots = e_\varrho+e_\varrho$$

so daß:

$$\bar{e}_i = e_1+\cdots+e_{i-1}+e_{i+1}+\cdots+e_\varrho$$

ist, und bezeichnen wir durch d_k den k-ten Elementarteiler des Systemes $r-A$, so ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} d_1 & = d_2 = \cdots = d_{\bar{e}_1} & = 1 \\ d_{\bar{e}_1+1} & = \cdots & = d_{\bar{e}_2} = r \\ d_{\bar{e}_2+1} & = \cdots & = d_{\bar{e}_3} = r^2 \\ \vdots & & \\ d_{\bar{e}_\varrho+1} & = \cdots & = d_n = r^\varrho. \end{array}$$

Hieraus folgt endlich, daß die charakteristische Zerlegung von $D_n = |r-A|$ des Systemes $r-A$ die folgende Darstellung der sämtlichen Determinantenteiler $D_n, D_{n-1}, \ldots$ liefert:

$$\begin{array}{lll} D_n & = r^{e_1} & r^{e_2} \quad \ldots\ r^{e_\varrho} \\ D_{n-1} & = r^{e_1-1} & r^{e_2-1} \ldots\ r^{e_\varrho-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ D_{n-i} & = r^{e_1-i} & r^{e_2-i} \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \end{array}$$

mit der Maßgabe, daß für D_{n-i} das rechts stehende Produkt nur soweit zu erstrecken ist, als die betreffenden Exponenten nicht negativ werden. Man erkennt so, daß die Elementarteiler und auch die Determinantenteiler des Systemes $r-A$ durch die charakteristische Zerlegung der Determinante $|r-A|$ in höchst einfacher Weise bestimmt sind, und umgekehrt.

Genau ebenso übersichtlich gestaltet sich die Untersuchung der Determinantenteiler von $r-A$ in dem allgemeinsten Falle, daß die zu A gehörige

Funktion $f(r)$ mehrere verschiedene Linearfaktoren besitzt, daß also das zugehörige Fundamentalsystem

$$A_i^0, A_i, \ldots, A_i^{g_i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,h)$$

aus mehreren verschiedenen Reihen besteht. Ist nämlich allgemein die charakteristische Zerlegung von $D_n = |r-A|$

$$D_n = \prod_i \prod_k (r-r_i)^{e_k^{(i)}},$$

so ergibt sich aus den soeben durchgeführten Überlegungen für den s-ten Determinantenteiler die elegante Darstellung:

$$D_{n-s} = \prod_i \prod_k (r-r_i)^{e_k^{(i)}-s},$$

wo das Produkt wieder nur über die Potenzen zu erstrecken ist, deren Exponenten positiv sind.

Wir wollen die obige Zerlegung von D_{n-s} die charakteristische Zerlegung dieses Determinantenteilers nennen. Dann ergibt sich die folgende einfache Vorschrift für die Bildung der einzelnen Determinantenteiler.

Der s-te Determinantenteiler von $(r-A)$ ist das Produkt der s-ten Ableitungen aller Faktoren von D_n in der charakteristischen Zerlegung.

§ 9.

Mit Hülfe der bis jetzt erlangten Resultate soll nun ein vollständiges System linear unabhängiger Matrizen B aufgestellt werden, welche mit einer gegebenen Matrix A vertauschbar sind.

Ist B mit A vertauschbar, ist also $BA = AB$, so ist offenbar auch jede rationale Funktion von B mit jeder rationalen Funktion von A vertauschbar; dann sind also je zwei Elemente der beiden Körper $K(1, B)$ und $K(1, A)$ vertauschbar. Zwei solche Körper sollen daher vertauschbare Körper genannt werden.

Transformiert man ferner alle Elemente von $K(1, B)$ und $K(1, A)$ kontragredient durch dasselbe System P, setzt man also:

$$\bar{B} = P^{-1}BP, \qquad \bar{A} = P^{-1}AP,$$

so sind $K(1, \bar{B})$ und $K(1, \bar{A})$ offenbar ebenfalls vertauschbar und umgekehrt. Wir können und wollen daher, ohne die Allgemeinheit zu verringern, voraussetzen, daß der Körper $K(1, A)$ von vorn herein kontragredient auf seine

reduzierte Form transformiert ist. Wäre das nämlich nicht der Fall, und wäre $K(1, \bar{A})$ der zu $K(1, A)$ äquivalente reduzierte Bereich, so daß also

$$K(1, A) = P^{-1} K(1, \bar{A}) P$$

ist; bilden ferner

$$\bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots \bar{B}_\varrho$$

ein vollständiges System linear unabhängiger mit $K(1, \bar{A})$ vertauschbarer Systeme, so sind offenbar

$$P^{-1} \bar{B}_1 P, \quad P^{-1} \bar{B}_2 P, \ldots, P^{-1} \bar{B}_\varrho P$$

ein vollständiges System linear unabhängiger mit $K(1, A)$ vertauschbarer Matrizen. Da wir ferner das Transformationssystem P wirklich zu finden imstande sind, so ist dann unsere Aufgabe vollständig gelöst.

Es sei nun

$$(1.) \qquad \begin{cases} A_1^0, A_1, \ldots A_1^{d_1-1}, \\ A_2^0, A_2, \ldots A_2^{d_2-1}, \\ \vdots \\ A_h^0, A_h, \ldots A_h^{d_h-1} \end{cases}$$

ein normales Fundamentalsystem für den Körper $K(1, A)$, so ist B dann und nur dann mit $K(1, A)$ vertauschbar, wenn diese Matrix mit den Systemen

$$(2.) \qquad A_1^0, A_2^0, \ldots A_h^0$$

und mit

$$(2^a.) \qquad A_1, A_2, \ldots A_h$$

vertauschbar ist; denn dann ist ja B auch mit allen Elementen von (1.), also auch mit jeder homogenen linearen Funktion dieser Systeme vertauschbar.

Es sei nun

$$A_1^0 = \mathfrak{E}_{11}$$

das erste der defekten Einheitssysteme (2.), und wir setzen für den Augenblick die Summe aller übrigen gleich $\mathfrak{E}_{22}$, so daß

$$\mathfrak{E}_{22} = A_2^0 + A_3^0 + \ldots + A_h^0 = 1 - \mathfrak{E}_{11}$$

ist. Schreiben wir dann entsprechend das zu untersuchende System B in der Form

$$B = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{12} \\ \mathfrak{B}_{21}, \mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix},$$

so geht die Gleichung $BA_1^0 = A_1^0 B$ über in:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{12} \\ \mathfrak{B}_{21}, \mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_{11}, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_{11}, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}, \mathfrak{B}_{12} \\ \mathfrak{B}_{21}, \mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix},$$

und aus ihr folgt

$$\mathfrak{E}_{11}\mathfrak{B}_{12} = 0, \qquad \mathfrak{B}_{21}\mathfrak{E}_{11} = 0,$$

d. h. es muß nach S. 133 (6.) $\mathfrak{B}_{12} = \mathfrak{B}_{21} = 0$, also

$$B = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}, 0 \\ 0, \mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix}$$

sein. Durch analoges Weiterschließen ergibt sich so das Resultat:

Ein System B ist nur dann mit dem reduzierten Körper $K(1, A)$ vertauschbar, wenn

$$B = \begin{pmatrix} B_{11}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & B_{22}, & \ldots, & 0 \\ \vdots & & & \\ 0, & 0, & \ldots, & B_{hh} \end{pmatrix}$$

ist, wenn also B in derselben Weise wie A in Partialsysteme zerfällt.

Ist dies der Fall, so ist B offenbar mit den h zugehörigen defekten Einheitssystemen

$$A_i^0 = E_{ii} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

in (2.) vertauschbar, und es ist jetzt nur noch weiter zu untersuchen, wie die einzelnen Partialsysteme B_{ii} von B beschaffen sein müssen, damit diese noch mit den Systemen A_i in (2^a.) vertauschbar sind.

Da diese letzte Untersuchung aber für jedes von diesen Partialsystemen B_{ii} getrennt verläuft, so können wir uns jetzt auf den Fall beschränken, daß $h = 1$, daß also die zu A gehörige Funktion nur die Potenz eines einzigen Linearfaktors ist.

§ 10.

Es sei also

(1.) $$f(A) = A^\varrho = 0$$

die zu dem Systeme A gehörige Gleichung, und daher

(2.) $$1, A, A^2, \ldots, A^{\varrho-1}$$

das zu $K(1, A)$ gehörige normale Fundamentalsystem. Ist dann $K(1, A)$ bereits ein reduzierter Körper, so ist:

$$A = E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{\varrho-1,\,\varrho}. \tag{3.}$$

Denken wir uns nun das zu untersuchende System B in gleicher Weise in seine ϱ^2 Partialsysteme zerlegt, so ist:

$$B = \sum_{\alpha,\beta=1}^{\varrho} B_{\alpha\beta}. \tag{4.}$$

Soll dann B mit A vertauschbar sein, so folgt aus der Gleichung:

$$AB = BA$$

oder:

$$\left(\sum_{\alpha} E_{\alpha-1,\,\alpha}\right)\left(\sum_{\alpha,\beta} B_{\alpha\beta}\right) = \left(\sum_{\alpha,\beta} B_{\alpha-1,\,\beta-1}\right)\left(\sum_{\beta} E_{\beta-1,\,\beta}\right)$$

durch Gleichsetzen der entsprechenden Partialsysteme:

$$E_{\alpha-1,\,\alpha}\, B_{\alpha,\,\beta} = B_{\alpha-1,\,\beta-1}\, E_{\beta-1,\,\beta} \tag{5.}$$

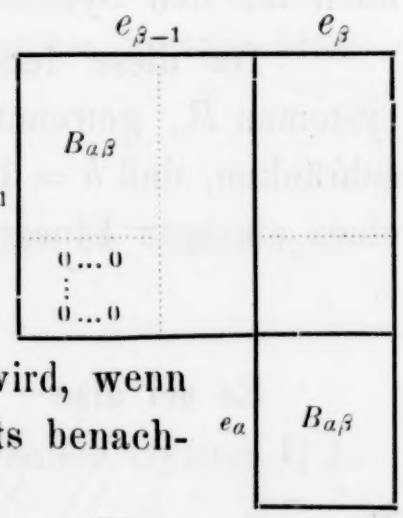
für alle Werte

$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \varrho, \varrho+1$$

mit der Maßgabe, daß ein eventuell auftretendes Partialsystem in welchem ein Index Null oder $(\varrho+1)$ ist, hier durch Null zu ersetzen ist. Dann stellen diese $(\varrho+1)^2$ Gleichungen die notwendige und hinreichende Bedingung dar, daß B mit A vertauschbar ist.

Die Bedeutung dieser Gleichungen kann nun unter Benützung der zu (6ª.) auf S. 133 gemachten Bemerkungen sehr einfach ausgesprochen werden:

Das Produkt $E_{\alpha-1,\,\alpha} B_{\alpha\beta}$ ist nämlich das System $\overline{B}_{\alpha-1,\,\beta}$, welches aus $B_{\alpha\beta}$ dadurch entsteht, daß man es in das über ihm liegende (längere) System von $e_{\alpha-1}$ Zeilen und e_β Kolonnen verschiebt und die dann übrig bleibenden $e_{\alpha-1} - e_\alpha$ letzten Zeilen durch Nullen ersetzt. Ferner ist das Produkt $B_{\alpha-1,\,\beta-1} E_{\beta-1,\,\beta}$ das System $\overline{\overline{B}}_{\alpha-1,\,\beta}$, welches erhalten wird, wenn man die e_β ersten Kolonnen von $B_{\alpha-1,\,\beta-1}$ in das rechts benachbarte System $B_{\alpha-1,\,\beta}$ hineinschiebt.



Da nun nach (5.) diese beiden Systeme $\overline{B}_{\alpha-1,\,\beta}$ und $\overline{\overline{B}}_{\alpha-1,\,\beta}$ identisch sein müssen, so ergibt sich zwischen je zwei in derselben Diagonalreihe

unmittelbar aufeinander folgenden Systemen $B_{\alpha-1,\beta-1}$ und $B_{\alpha\beta}$ die folgende einfache Beziehung:

Jedes System $B_{\alpha-1,\beta-1}$ entsteht aus dem schräge unter ihm befindlichen $B_{\alpha\beta}$ dadurch, daß diesem unten $(e_{\alpha-1}-e_\alpha)$ Zeilen mit den Elementen Null, und dem so sich ergebenden Systeme noch $(e_{\beta-1}-e_\beta)$ Kolonnen mit ganz beliebigen Elementen hinzugefügt werden. Ist also $B_{\alpha\beta}$ gegeben, so ist $B_{\alpha-1,\beta-1}$ bis auf

$$(e_{\beta-1}-e_\beta)\, e_{\alpha-1}$$

willkürliche Elemente vollständig bestimmt. Ist umgekehrt das obere System $B_{\alpha-1,\beta-1}$ bekannt, so ist durch dieses das schräge unter ihm stehende System $B_{\alpha,\beta}$ eindeutig bestimmt.

Aus dem letzten Teile dieses Satzes folgt, daß alle unterhalb der mittleren Diagonale stehenden Systeme

$$B_{ki} \qquad k > i$$

Null sein müssen, daß also B die Form hat:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11}, B_{12}, \dots B_{1\varrho} \\ 0, \quad B_{22}, \dots B_{2\varrho} \\ \vdots \\ 0, \quad 0, \quad \dots B_{\varrho\varrho} \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen dazu nur, daß alle Partialsysteme

$$B_{k1} \qquad (k = 2, \dots, \varrho)$$

des ersten Vertikalstreifens außer B_{11} gleich Null sind, da dann dasselbe für alle schräge unter ihnen stehenden Partialsysteme folgt. Setzt man aber in der Hauptgleichung (5.)

$$\alpha = k, \quad \beta = 1$$

und beachtet, daß dann die rechte Seite $B_{k-1,0}\, E_{01}$ nach der zu (5.) gemachten Bemerkung durch Null zu ersetzen ist, so folgt die Gleichung

$$E_{k-1,k}\, B_{k,1} = 0,$$

d. h. es ist wirklich $B_{k1} = 0$. Diese Gleichung gilt aber nicht für $k = 1$, da dann auch ihre linke Seite durch Null zu ersetzen ist. Das erste System B_{11} ist also im Allgemeinen nicht Null.

So ergibt sich für die Konstruktion des allgemeinsten mit dem reduzierten Körper $K(1, A)$ vertauschbaren Systemes B die folgende einfache Vorschrift:

Ist

$$A = E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{\varrho-1,\,\varrho},$$

so fülle man in B den ganzen letzten Vertikalstreifen:

$$B_{1\varrho} + B_{2\varrho} + \cdots + B_{\varrho\varrho}$$

mit beliebigen Elementen aus. Um aus ihm den $(\varrho-1)$-ten Vertikalstreifen

$$B_{1,\varrho-1} + B_{2,\varrho-1} + \cdots + B_{\varrho,\varrho-1}$$

zu erhalten, verschiebe man jedes Partialsystem $B_{i\varrho}$ nach dem links oben befindlichen Nachbarsystem $B_{i-1,\varrho-1}$, nachdem man es zuerst unten mit Nullen, und alsdann hinten mit beliebigen Elementen gerändert hat. Das dann noch übrig bleibende letzte Partialsystem $B_{\varrho,\varrho-1}$ ist mit Nullen auszufüllen. Fährt man in derselben Weise fort bis zum ersten Vertikalstreifen, so erhält man das allgemeinste mit A vertauschbare System B.

Als Beispiel gebe ich das allgemeinste mit dem reduzierten Körper $K(1, A)$ vertauschbare System B unter der Voraussetzung, daß

$$A = E_{12} + E_{23} + E_{34},$$

also

$$A^4 = 0,$$

und daß

$$e_1 = 4,\ e_2 = 3,\ e_3 = 1,\ e_4 = 1$$

ist. Das gesuchte System neunter Ordnung hat dann die folgende Form:

$$B = \left|\begin{array}{cccc|ccc|c|c}
a_9 & b_{51} & b_{52} & c_1 & a_8 & b_{11} & b_{12} & a_5 & a_1 \\
0 & b_{61} & b_{62} & c_2 & 0 & b_{21} & b_{22} & a_6 & a_2 \\
0 & b_{71} & b_{72} & c_3 & 0 & b_{31} & b_{32} & a_7 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & b_{41} & b_{42} & 0 & a_4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & b_{51} & b_{52} & a_8 & a_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{61} & b_{62} & 0 & a_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{71} & b_{72} & 0 & a_7 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & a_8 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9
\end{array}\right|.$$

Ein vollständiges System von linear unabhängigen mit A vertauschbaren Matrizen erhält man offenbar, wenn man in B alle Elemente mit Ausnahme von je einem gleich Null, und dieses gleich Eins setzt, denn die so sich ergebenden Systeme sind offenbar erstens linear unabhängig, zweitens mit A vertauschbar, und drittens ist das oben gefundene allgemeinste System eine homogene lineare Funktion von diesen.

Die Anzahl dieser linear unabhängigen Systeme ist somit in diesem speziellen Falle gleich

$$9+14+4=27.$$

Um die entsprechende Anzahl in dem allgemeinen Falle zu bestimmen, beachte man, daß in jedem Partialsystem

$$B_{\alpha\beta} \qquad (\alpha \leqq \beta)$$

die $(e_\beta - e_{\beta+1})$ letzten Kolonnen und nur sie willkürlich anzunehmende Elemente enthalten, daß also $B_{\alpha\beta}$ im ganzen $e_\alpha(e_\beta - e_{\beta+1})$ solche Elemente hat. Für den i-ten Horizontalstreifen

$$B_{ii}+B_{i,i+1}+\cdots+B_{i\varrho}$$

ergeben sich also

$$e_i(e_i-e_{i+1})+e_i(e_{i+1}-e_{i+2})+\cdots+e_i e_\varrho = e_i^2,$$

also für das ganze System B genau

$$e_1^2+e_2^2+\cdots+e_\varrho^2$$

willkürliche Konstanten. Ebenso groß ist also die Anzahl der linear unabhängigen mit A vertauschbaren Systeme.

Für ein ganz beliebiges System A, für welches die einzelnen charakteristischen Zahlen

$$\begin{matrix} e_1^{(1)}\ e_2^{(1)} \ldots e_{\varrho_1}^{(1)} \\ e_1^{(2)}\ e_2^{(2)} \ldots e_{\varrho_2}^{(2)} \\ \vdots \\ e_1^{(h)}\ e_2^{(h)} \ldots e_{\varrho_h}^{(h)} \end{matrix}$$

sind, ist die Anzahl der linear unabhängigen mit A vertauschbaren Systeme B also gleich

$$\sum_{k=1}^{h} \sum_{i=1}^{\varrho_i} e_i^{(k)2}.$$

Dieses Resultat wurde in einer etwas anderen Form zuerst von Herrn *Frobenius* ausgesprochen.

Wir bestimmen endlich noch die Gleichung $|r-B| = 0$, welcher das allgemeinste mit A vertauschbare System B genügt.

Aus der auf S. 157 gefundenen Darstellung von B ergibt sich nun zuerst die Gleichung:

$$|r-B| = |rE_{11}-B_{11}|\,|rE_{22}-B_{22}|\ldots|rE_{\varrho\varrho}-B_{\varrho\varrho}|,$$

und es sind also nur noch jene ϱ Faktoren weiter zu untersuchen.

Nun besteht die Determinante $|B_{\varrho\varrho}|$ aus e_ϱ^2 ganz beliebig anzunehmenden Elementen. Für die darüber stehende Determinante

$$|B_{\varrho-1,\,\varrho-1}| = \begin{array}{|c|c|}\hline B_{\varrho\varrho} & \\ \hline \begin{matrix}0\ldots 0\\ \cdots\cdots\\ 0\ldots 0\end{matrix} & \overline{B}_{\varrho-1,\,\varrho-1}\\ \hline\end{array}$$

erhält man die Darstellung:

$$|B_{\varrho-1,\,\varrho-1}| = |B_{\varrho\varrho}|\,|\overline{B}_{\varrho-1,\,\varrho-1}|$$

wo das System $\overline{B}_{\varrho-1,\,\varrho-1}$ aus $(e_{\varrho-1}-e_\varrho)^2$ Elementen besteht, welche wiederum ganz beliebig sind. Genau ebenso folgt:

$$|B_{\varrho-2,\,\varrho-2}| = |B_{\varrho\varrho}|\,|\overline{B}_{\varrho-1,\,\varrho-1}|\cdot|\overline{B}_{\varrho-2,\,\varrho-2}|$$

wo $\overline{B}_{\varrho-2,\,\varrho-2}$ aus $(e_{\varrho-2}-e_{\varrho-1})^2$ willkürlichen Konstanten besteht, u. s. w.; so ergibt sich zunächst für B die Gleichung:

$$B = |\overline{B}_{11}|\,|\overline{B}_{22}|^2\,|\overline{B}_{33}|^3\ldots|B_{\varrho\varrho}|^\varrho$$

wo allgemein $|\overline{B}_{ii}|$ eine Determinante der (e_i-e_{i+1})-ten Ordnung mit beliebigen Elementen ist.

Bezeichnet man also mit $|\overline{B}_{ii}-r|$ diejenige Determinante, welche aus $\overline{B}_{ii}$ dadurch entsteht, daß man von den Diagonalelementen r abzieht, so ergibt sich für die charakteristische Gleichung der Ausdruck:

$$|B-r| = |\overline{B}_{11}-r|\cdot|\overline{B}_{22}-r|^2\,|\overline{B}_{33}-r|^3\ldots|B_{\varrho\varrho}-r|^\varrho.$$

wobei die ϱ Faktoren bzw. von den Graden $e_1-e_2\ e_2-e_3, \ldots, e_\varrho$ sind, und stets so gewählt werden können, daß alle ihre e_1 Wurzeln beliebige von einander verschiedene Werte haben.

§ 11.

Wir wollen von den bisher erlangten Resultaten noch einige Anwendungen auf die Theorie der bilinearen und quadratischen Formen machen.

Zu jedem Systeme n-ter Ordnung:

$$A = (a_{ik}) \tag{1.}$$

gehört eine eindeutig bestimmte bilineare Form:

$$A(x|y) = \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, y_k, \tag{1a.}$$

welche durch den gleichen Buchstaben bezeichnet werden mag. Führt man an Stelle der Variablen x und y neue Veränderliche ξ und η ein, welche mit jenen durch lineare Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \sum_k p_{ik}\, \xi_k, \\ y_i &= \sum_k q_{ik}\, \eta_k \end{aligned}\right\} \quad (i,k = 1,\ldots,n)$$

zusammenhängen, so geht A in eine neue bilineare Form:

$$\overline{A}(\xi|\eta) = \sum \overline{a}_{ik}\, \xi_i\, \eta_k$$

über, deren Koeffizientensystem $\overline{A}$ mit A durch die Gleichung

$$\overline{A} = P'AQ$$

zusammenhängt, wo P' das zu $P = (p_{ik})$ konjugierte System bedeutet und $Q = (q_{ik})$ das zweite Substitutionssystem ist.

Es sei nun $A(x|y)$ eine beliebige bilineare Form, deren Koeffizientensystem $A = (a_{ik})$ sein soll. Dann entspricht dem zu A gehörigen Körper $K(1, A)$ ein Körper von zugehörigen bilinearen Formen $K(1, A(x|y))$, nämlich jedem Systeme $B = \varphi(A)$ die zugehörige Form $B(x|y)$, deren Koeffizientensystem eben die Matrize B ist.

Speziell erhalten wir so eine Normalbasis von ν Elementen

$$A_i^k(x|y), \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,\ldots,h \\ k = 1,2,\ldots,\varrho_i \end{pmatrix} \tag{2.}$$

durch welche alle Bilinearformen von $K(1, A(x|y))$ homogen und linear mit konstanten Koeffizienten darstellbar sind. Nach dem soeben bewiesenen allgemeinen Satze gibt es nun eine solche *kontragrediente* Transformation für die Variablen x und y, daß alle Formen der Normalbasis simultan auf ihre reduzierte Form gebracht werden. Es sei:

$$(2^{a}.) \qquad \overline{A}^{0}, \overline{A}, \overline{A}^{2} \ldots \overline{A}^{\varrho-1}$$

irgend eine der h Reihen jener transformierten Normalbasis; dann bestehen die Gleichungen:

$$(3.) \quad \begin{cases} \overline{A}^{0} &= E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{\varrho\varrho} \\ \overline{A} &= E_{12}+\cdots+E_{\varrho-1,\,\varrho} \\ \vdots & \\ \overline{A}^{\varrho-1} &= E_{1\varrho}. \end{cases}$$

Dann ergeben sich für die zugehörigen transformierten Bilinearformen die Darstellungen:

$$(3^{a}.) \quad \begin{cases} A^{0}(\xi|\eta) &= (\xi_1\eta_1+\cdots+\xi_{e_1}\eta_{e_1})+(\xi_{e_1+1}\eta_{e_1+1}+\cdots+\xi_{e_1+e_2}\eta_{e_1+e_2})+\cdots \\ A(\xi|\eta) &= (\xi_1\eta_{e_1+1}+\cdots+\xi_{e_2}\eta_{e_1+e_2})+(\xi_{e_1+1}\eta_{e_1+e_2+1}+\cdots)+\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A^{\varrho-1}(\xi|\eta) &= (\xi_1\eta_{e_1+\cdots+e_{\varrho-1}+1}+\cdots+\xi_{e_\varrho}\eta_{e_1+\cdots+e_\varrho}), \end{cases}$$

wo die n Veriablen ξ_i bestimmte linear unabhängige homogene lineare Funktionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, und die η_k ebensolche lineare Funktionen von $y_1, \ldots, y_n$ sind. Jede der Partialformen $E_{ik}(\xi|\eta)$ oder der $A_i^k(\xi, \eta)$ enthält dann eine bestimmte Anzahl der Variablen ξ, η, während sie von den anderen unabhängig ist. Wir wollen die in einer Partialform $E_{ik}(\xi, \eta)$ oder $A_i^k(\xi, \eta)$ auftretenden Variablen ξ, η *die zu ihr gehörigen Variablen* nennen. Aus der einfachen Form (3ª.) der transformierten Bilinearformen $A_i^k(x|y)$ ergibt sich nun sofort, daß man die n Variablen x stets so bestimmen kann, daß alle $\nu-1$ Formen der Normalbasis (2.) für *beliebige* Werte aller $y_1, \ldots, y_n$ verschwinden, während eine einzige der h Einheitsformen $A_i^{(0)}(x|y)$, etwa $A_1^0(x|y)$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Zu diesem Zwecke brauchen wir ja in den transformierten Formen $A(\xi|\eta)$ nur diejenigen Variablen ξ gleich Null zu setzen, welche zu allen jenen Formen außer $A_1^0(\xi|\eta)$ gehören, diesen selbst aber irgend welche von Null verschiedene Werte beizulegen. Da die zu $E_{\varrho\varrho}(\xi|\eta)$ in (3.) gehörigen Funktionen ξ sicher nicht in irgend einem anderen Elemente $A_i^k(\xi|\eta)$ auftreten, so werden durch diese Forderung nicht alle ξ gleich Null gesetzt; also gibt es sicher unendlich viele Wertsysteme $(x_1, \ldots, x_n)$, welche dieser Bedingung für unbestimmte $y_1, \ldots, y_n$ genügen. Genau ebenso zeigt man allgemein, daß man $(x_1, \ldots, x_n)$ stets so bestimmen kann, daß für unbestimmte y_i etwa die i ersten Elemente

$$A_1^0(x|y),\ A_1(x|y), \ldots, A_1^{i-1}(x|y)$$

der ersten Reihe in (2.) von Null verschieden sind, aber alle übrigen Elemente verschwinden.

Ich betrachte jetzt zuerst den Fall, daß das System $A = (a_{ik})$ reell und symmetrisch, daß also allgemein

$$a_{ik} = a_{ki}$$

ist, oder, was dasselbe ist, daß das zu A konjugierte System A' gleich A ist. Sind A und B zwei vertauschbare symmetrische Systeme, so sind auch ihre Summe, ihre Differenz, ihr Produkt und ihr Quotient, falls ein solcher existiert, ebenfalls symmetrisch, wie aus der Gleichung

$$(AB)' = B'A' = BA = AB$$

unmittelbar folgt.

Hieraus ergibt sich der Satz:

Ist A ein symmetrisches System, so gilt dasselbe für alle Systeme des zugehörigen *„symmetrischen“* Körpers $K(1, A)$. Speziell sind alle Elemente

$$A_i^0,\ A_i, \ldots, A_i^{e_i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

der zugehörigen Normalbasis symmetrische Systeme.

Wir beweisen nun die beiden folgenden Sätze, welche die Grundlage der Theorie der symmetrischen Systeme und der quadratischen Formen bilden.

1. Die h Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_h$ der zu einem symmetrischen System gehörigen Gleichung

(4.) $$f(A) = (r-r_1)^{e_1}(r-r_2)^{e_2}\ldots(r-r_h)^{e_h}$$

sind sämtlich reell.

2. Die h Systeme $A_1, A_2, \ldots, A_h$ der Normalbasis für einen symmetrischen Körper sind sämtlich Null, d. h. die Normalbasis eines symmetrischen Körpers ist von der Form

(5.) $$A_1^0, A_2^0, \ldots, A_h^0.$$

Um den ersten Satz zu beweisen, stelle ich die zu A gehörige symmetrische bilineare Form $A(x|y)$ durch unsere Normalbasis dar; dann ist nach (20ª.) auf S. 127

$$A = \sum_i (r_i A_i^0 + A_i),$$

oder, wenn r eine Unbestimmte bedeutet, so ist

$$(6.) \qquad r - A = ((r-r_1)\,A_1^0 - A_1) + \cdots + ((r-r_h)\,A_h^0 - A_h).$$

Es sei nun r_1 eine Wurzel der zu A gehörigen Gleichung, von der wir nicht wissen, ob sie reell oder komplex ist. Wir setzen dann für $x_1, \ldots x_n$ ein so bestimmtes Wertsystem $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$, daß für unbestimmte $y_1, \ldots y_n$ alle Systeme $A_i^k(\overline{x}|y)$ Null werden, mit einiger Ausnahme von $A_1^0(\overline{x}|y)$, welches von Null verschieden sein soll. Dann geht unsere Gleichung über in:

$$(6^a.) \qquad r(\overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n) - A(\overline{x}|y) = (r-r_1)\,A_1^0(\overline{x}|y).$$

Die Zahlen $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ können reell oder imaginär sein, je nachdem die sie bestimmenden Gleichungen $\xi_i = 0$ reelle oder imaginäre Koeffizienten haben. Wir setzen jetzt allgemein

$$y_i = \overline{x}_i',$$

wo $\overline{x}_i'$ die zu $\overline{x}_i$ konjugierte Zahl bedeutet. Dann sind in der Gleichung

$$(6^b.) \qquad r(\overline{x}_1\overline{x}_1' + \overline{x}_2\overline{x}_2' + \cdots + \overline{x}_n\overline{x}_n') - A(\overline{x}|\overline{x}') = (r-r_1)\,A_1^0(\overline{x}|\overline{x}')$$

alle Glieder mit einziger Ausnahme von r_1 reell, denn die Zahlen $A(\overline{x}|\overline{x}')$ und $A_1^0(\overline{x}|\overline{x}')$ bleiben ungeändert, wenn man i mit $-i$ vertauscht, weil sich dann nur die $\overline{x}$ und $\overline{x}'$ vertauschen. Da ferner der Koeffizient von r auf der linken Seite offenbar positiv ist, so ist rechts auch $A_1^0(\overline{x}|\overline{x}')$ sicher von Null verschieden; die aus dieser Gleichung eindeutig bestimmte Wurzel r_1 ist also sicher reell, und hiermit ist unsere erste Behauptung vollständig erwiesen.

Unter Benutzung dieses Resultates kann man nun sehr leicht beweisen, daß alle Systeme $A_1, A_2, \ldots, A_h$ der zu $K(1, A)$ gehörigen Normalbasis identisch Null sind. Dieselben sind nämlich symmetrische Systeme mit reellen Koeffizienten, denn sie sind rationale Funktionen von A, deren Koeffizienten nur von den h Wurzeln $r_1, \ldots, r_h$ rational abhängen und diese sind sämtlich reell, wie wir soeben bewiesen haben. Angenommen nun, A_1 besäße nicht den Rang Null, und es sei

$$\overline{A} = A_1^{\varrho-1}$$

die letzte von Null verschiedene Potenz von A_1. Dann ist $\overline{A}$ ebenfalls ein reelles symmetrisches System, für welches

$$\overline{A}^2 = A^{2\varrho-2} = 0$$

ist. Aber aus der Gleichung:

$$(\overline{a}_{ik})^2 = (\overline{a}_{ik})\,(\overline{a}_{ik})$$

folgt für ein solches System notwendig, daß alle seine Elemente Null sind. Denn aus der dann für irgend ein Diagonalelement von $\overline{A}^2$ geltenden Gleichung:

$$\overline{a}_{i1}\,\overline{a}_{1i} + \overline{a}_{i2}\,\overline{a}_{2i} + \cdots + \overline{a}_{in}\,\overline{a}_{ni} = 0$$
$$= \overline{a}_{i1}^2 + \overline{a}_{i2}^2 + \cdots + \overline{a}_{in}^2 = 0$$

folgt ja, daß alle seine Elemente $\overline{a}_{ik} = 0$ sein müssen.

Für ein symmetrisches System A ist also die Normalbasis

$$A_1^0,\ A_2^0,\ \ldots,\ A_h^0;$$

die zugehörige charakteristische Zerlegung von $|r-A|$ ist demnach die folgende:

$$D_n = |r-A| = (r-r_1)^d\,(r-r_2)^{d_2}\ldots(r-r_h)^{d_h},$$

wenn $d_1, d_2, \ldots, d_h$ die Rangzahlen der h Systeme $A_1^0, \ldots, A_h^0$ bedeuten.

Ferner ergeben sich in diesem Falle die Determinantenteiler des Systemes $(r-A)$ der Reihe nach gleich:

$$D_{n-1} = (r-r_1)^{d_1-1}\,(r-r_2)^{d_2-1}, \ldots, (r-r_h)^{d_h-1}$$
$$\vdots$$
$$D_{n-k} = \prod_{d_i \geqq k} (r-r_i)^{d_i-k}.$$

Bildet man also den letzten Elementarteiler $E_n = \dfrac{D_n}{D_{n-1}}$, so erhält man nach S. 120 oben für jedes symmetrische System die zugehörige Gleichung:

$$f(A) = (A-r_1)\,(A-r)\ldots(A-r_h) = 0.$$

Die Gleichung niedrigsten Grades für ein symmetrisches System besitzt also stets reelle und einfache Wurzeln.

Endlich ergeben sich ohne Weiteres die folgenden Fundamentalsätze für die symmetrischen Systeme.

Ist A ein symmetrisches System, so besitzt das System $(r-A)$ lauter reelle und einfache Elementarteiler.

Ein reelles symmetrisches System kann stets kontragredient auf die Diagonalform:

$$\begin{pmatrix} r_1 & & & & \\ & r_1 & & & \\ & & r_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r_h \end{pmatrix}$$

transformiert werden.

Ist A ein symmetrisches System und

$$|r-A| = (r-r_1)^{d_1}(r-r_2)^{d_2}\dots(r-r_h)^{d_h},$$

so ist A genau mit

$$d_1^2+d_2^2+\cdots+d_h^2$$

linear unabhängigen Systemen vertauschbar.

In genau derselben Weise können, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll, die entsprechenden Fundamentalsätze für die orthogonalen Systeme bewiesen werden. Endlich mag auch nur erwähnt werden, daß sich die ganze Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Hülfe der hier gefundenen Sätze in wunderbar einfacher Weise entwickeln läßt.

Über eine Darstellung der Anzahl der Idealklassen eines algebraischen Körpers durch eine unendliche Reihe.

(Von Herrn *Edmund Landau* in Berlin.)

Bekanntlich steht die Anzahl h der Idealklassen eines algebraischen Körpers $\varkappa$ in folgendem Zusammenhang mit der Funktion

$$(1.) \qquad \zeta_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s},$$

wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale des Körpers durchläuft, $N\mathfrak{n}$ die Norm von $\mathfrak{n}$ bezeichnet und $F(n)$ die Anzahl der Ideale des Körpers, deren Norm gleich der positiven ganzen Zahl n ist. Es bedeute g die durch den Körper bestimmte positive Konstante

$$\frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}R}{w\sqrt{|D|}},$$

wo r_1 die Anzahl der reellen konjugierten Körper ist, r_2 die Anzahl der imaginären konjugierten Körperpaare, w die Anzahl der im Körper vorkommenden Einheitswurzeln, D die Diskriminante, R der Regulator des Körpers. Dann sagt ein bekannter *Dedekind*scher Satz*) aus: Die Reihe (1.) konvergiert für $s>1$, und wenn s gegen 1 abnimmt, so existiert der Grenzwert

$$(2.) \qquad \lim_{s=1}(s-1)\zeta_\varkappa(s) = \lim_{s=1}(s-1)\sum_{\mathfrak{n}}\frac{1}{N\mathfrak{n}^s} = \lim_{s=1}(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^s}$$

*) Vergl. z. B. *Dirichlet*, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausg. v. *Dedekind*, 4. Aufl., 1894, S. 610.

und ist gleich gh. Die Bestimmung der Klassenzahl ist also auf die Untersuchung jenes Grenzwertes zurückführbar.

Für gewisse Körper besitzt man viel einfachere Darstellungen der Klassenzahl; z. B. für quadratische Körper ist die Aufgabe durch die von *Gauß* und *Dirichlet* ausgeführte Bestimmung der Klassenzahl der binären quadratischen Formen erledigt. Das Gemeinsame des *Gauß*schen und des *Dirichlet*schen Weges, welche schließlich zu einem Resultate in endlicher Gestalt führen, ist, daß die Klassenzahl, deren Bestimmung zunächst auf die des Grenzwertes (2.)*) hinauskommt, alsdann durch eine unendliche Reihe dargestellt wird; es ergibt sich nämlich, wenn $\left(\frac{D}{n}\right)$ das von *Kronecker* verallgemeinerte *Jacobi*sche Symbol bezeichnet,

$$(3.) \qquad \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} h = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \quad \text{für } D = -\Delta < 0,^{**})$$

$$(4.) \qquad \frac{2 \log \varepsilon}{\sqrt{D}} h = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \quad \text{für } D > 0.^{***})$$

Der Faktor von h in (3.) und (4.) stimmt genau mit der oben durch g bezeichneten Konstanten überein. Die Übereinstimmung des Grenzwertes (2.) mit der Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

pflegt folgendermaßen dargetan zu werden. Es ist bekanntlich im vorliegenden Falle des quadratischen Körpers

$$F(m) = \sum_{n|m} \left(\frac{D}{n}\right),^{\dagger})$$

also für $s > 1$

$$\zeta_{\chi}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum_{n|m} \left(\frac{D}{n}\right)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(nk)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \cdot \zeta(s),$$

---

*) Bei *Dirichlet* ist es genau die obige Form des Grenzwertes (2.); bei *Gauß* tritt er in etwas anderer Gestalt auf.

**) Für $\Delta = 4$ bezw. $\Delta = 3$ ist hier die linke Seite noch durch 2 bezw. 3 zu dividieren.

***) ε bezeichnet die sog. Fundamentaleinheit.

†) Diese Schreibweise besagt, daß n alle Divisoren von m durchlaufen soll.

$$(5.) \qquad \frac{\zeta_\varkappa(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}.$$

Man zeigt nun leicht, daß für $s=1$ der Grenzwert der rechten Seite existiert und gleich $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$ ist; andererseits nähern sich für $s=1$ die Funktionen $(s-1)\zeta_\varkappa(s)$ und $(s-1)\zeta(s)$ den Grenzwerten gh und 1, die linke Seite von (5.) also dem Werte gh. Daher ist

$$gh = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Die folgenden Entwicklungen bezwecken, eine analoge Darstellung der Klassenzahl eines beliebigen algebraischen Körpers zu geben. Formal führt zwar das beim quadratischen Körper übliche Verfahren leicht auf eine bestimmte unendliche Reihe (vergl. § 1); der springende Punkt ist jedoch der Konvergenzbeweis für diese Reihe, den ich (vergl. §§ 2–4) unter Benutzung eines kürzlich von mir nachgewiesenen Satzes über die *Möbius*sche Funktion $\mu(k)$ erbringen werde. Das Folgende soll übrigens nicht beanspruchen, das große Problem von der Darstellung der Klassenzahl in endlicher Form seiner Lösung näher zu bringen; z. B. beim Kreisteilungskörper ist ja dies Problem ohne Benutzung der hier auftretenden unendlichen Reihe schon gelöst.

§ 1.

Es läßt sich für einen beliebigen algebraischen Körper $\varkappa$ der Quotient $\frac{\zeta_\varkappa(s)}{\zeta(s)}$ auf eindeutige Weise in eine für $s>1$ konvergente *Dirichlet*sche Reihe

$$(6.) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s}$$

entwickeln, welche der beim quadratischen Körper auftretenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{D}{n}\right)}{n^s}$$

entspricht. Daß es nämlich höchstens eine solche Reihe gibt, folgt aus dem bekannten Satz: Zwei für alle $s>s_0$ ihrem Werte nach übereinstimmende Reihen der Gestalt (6.) haben beziehlich gleiche Koeffizienten. Daß wirklich im vorliegenden Fall eine Entwicklung (6.) vorhanden ist, ergibt sich, indem man die beiden Gleichungen

(7.) $$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(m)}{m^s}$$

und

(8.) $$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s}$$

mit einander multipliziert; dadurch erhält man

(9.) $$\frac{\zeta_\varkappa(s)}{\zeta(s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F(m)}{m^s} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(m)\,\mu(k)}{(mk)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k|n} \mu(k)\, F\left(\frac{n}{k}\right)}{n^s}.$$

Diese *Dirichlet*sche Reihe

(10.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

wo also

$$c_n = \sum_{k|n} \mu(k)\, F\left(\frac{n}{k}\right)^{*)}$$

ist, konvergiert jedenfalls für $s > 1$, da dort die rechten Seiten von (7.) und (8.) absolut konvergieren.

Wenn s gegen 1 abnimmt, nähert sich die linke Seite von (9.), welche ja in der Form $\frac{(s-1)\,\zeta_\varkappa(s)}{(s-1)\,\zeta(s)}$ geschrieben werden kann, dem Grenzwerte gh. Falls es nun wahr ist, daß die formal für $s=1$ aus der rechten Seite von (9.) entstehende Reihe

(11.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k|n} \mu(k)\, F\left(\frac{n}{k}\right)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}$$

konvergiert, so ist

(12.) $$gh = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n};$$

denn eine für $s = s_0$ konvergente *Dirichlet*sche Reihe ist bekanntlich nach rechts stetig, sodaß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} = \lim_{s=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \lim_{s=1} \frac{\zeta_\varkappa(s)}{\zeta(s)} = gh$$

geschlossen werden darf.

---

*) Übrigens genügt c_n offenbar für teilerfremde n, n' dem Multiplikationsgesetz $c_{nn'} = c_n c_{n'}$. Da für Primzahlpotenzen p^λ

$$c_{p^\lambda} = F(p^\lambda) - F(p^{\lambda-1})$$

ist, so ist also für $n = \prod_{p|n} p^{\lambda_p}$

$$c_n = \prod_{p|n} (F(p^{\lambda_p}) - F(p^{\lambda_p - 1})).$$

Ich werde nun im Folgenden tatsächlich nachweisen, daß die Reihe (11.) für einen beliebigen algebraischen Körper konvergiert, womit die Gleichung (12.) bewiesen sein wird; ich bemerke ausdrücklich, daß, während man beim quadratischen Körper leicht die Konvergenz der Reihe (10.) für alle $s>0$ beweisen kann, es mir im allgemeinen Fall gerade noch gelingt, die (für den vorliegenden Zweck hinreichende) Konvergenz für $s=1$ zu beweisen, dagegen nicht die Konvergenz in irgend einem links von $s=1$ gelegenen Punkt.

§ 2.

Es werde

$$\sum_{n=1}^{x} c_n = S_x$$

gesetzt. Der Nachweis der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}$$

läßt sich auf den Nachweis der Relation

$$S_x = \sum_{n=1}^{x} c_n = O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) \tag{13.}$$

zurückführen, d. h. des Satzes, daß das Produkt

$$\frac{\log^2 x}{x}\left|\sum_{n=1}^{x} c_n\right|$$

für alle x unterhalb einer endlichen Schranke c gelegen ist.

Denn aus

$$|S_x| < \frac{cx}{\log^2 x} \qquad (x=2,3,4,\ldots)$$

folgt für zwei beliebige Zahlen $x>2$ und $y \geqq x$

$$\sum_{n=x}^{y} \frac{c_n}{n} = \sum_{n=x}^{y} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=x}^{y} S_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{S_{x-1}}{x} + \frac{S_y}{y+1}$$

$$= \sum_{n=x}^{y} \frac{S_n}{n(n+1)} - \frac{S_{x-1}}{x} + \frac{S_y}{y+1},$$

$$\left|\sum_{n=x}^{y} \frac{c_n}{n}\right| \leqq \sum_{n=x}^{y} \frac{|S_n|}{n^2} + \frac{|S_{x-1}|}{x-1} + \frac{|S_y|}{y}$$

$$< \sum_{n=x}^{y} \frac{cn}{n^2 \log^2 n} + \frac{c(x-1)}{(x-1)\log^2(x-1)} + \frac{cy}{y \log^2 y}$$

$$= c \sum_{n=x}^{y} \frac{1}{n \log^2 n} + \frac{c}{\log^2(x-1)} + \frac{c}{\log^2 y}.$$

Dieser Ausdruck nähert sich für $x=\infty$, $y=\infty$ der Grenze 0, so daß also wirklich aus (13.) die Konvergenz von (11.) folgt. Ich habe also nur (13.) zu beweisen.

§ 3.

Es ist

$$S_x=\sum_{n=1}^{x} c_n=\sum_{n=1}^{x}\sum_{k|n}\mu(k)\,F\left(\frac{n}{k}\right)=\sum_{n=1}^{x}\sum_{km=n}\mu(k)\,F(m),$$

wo k und m alle Paare komplementärer Divisoren von n durchlaufen; es ist also

$$S_x=\sum_{k,m}\mu(k)\,F(m),$$

wo k und m alle Zahlenpaare durchlaufen, deren Produkt $km\leqq x$ ist. Für jedes solche Paar ist entweder $k\leqq\sqrt{x}$ oder $m\leqq\sqrt{x}$ oder beides. Es mögen zunächst alle Paare berücksichtigt werden, in denen $k\leqq\sqrt{x}$ ist, dann alle, für welche $m\leqq\sqrt{x}$ ist; es sind dann alle — bisher doppelt gezählten — Paare einmal in Abrechnung zu bringen, für welche zugleich $k\leqq\sqrt{x}$ und $m\leqq\sqrt{x}$ ist. Dadurch ergibt sich

$$(14.)\qquad S_x=\sum_{k=1}^{\sqrt{x}}\mu(k)\sum_{m=1}^{\frac{x}{k}}F(m)+\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}F(m)\sum_{k=1}^{\frac{x}{m}}\mu(k)-\sum_{k=1}^{\sqrt{x}}\mu(k)\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}F(m)^{*}).$$

Zur Abkürzung werde — auch für nicht ganze x —

$$\sum_{m=1}^{x}F(m)=H(x)$$

und

$$\sum_{k=1}^{x}\mu(k)=M(x)$$

gesetzt; dann läßt sich (14.) so schreiben:

$$(15.)\qquad S_x=\sum_{k=1}^{\sqrt{x}}\mu(k)\,H\left(\frac{x}{k}\right)+\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}F(m)\,M\left(\frac{x}{m}\right)-M(\sqrt{x})\,H(\sqrt{x}).$$

§ 4.

Nun habe ich in meiner Arbeit**) „über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$“ bewiesen, daß

---

*) Ist eine obere Summationsgrenze nicht ganz, so soll der Summationsbuchstabe alle unter ihr gelegenen positiven ganzen Zahlen durchlaufen.

**) Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2ª, 1903, S. 548.

(16.) $$M(x) = \sum_{k=1}^{x} \mu(k) = O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

ist, und es hat andererseits Herr *Weber**) den Nachweis geführt, daß

(17.) $$H(x) = ghx + O\left(x^{1-\frac{1}{\nu}}\right)$$

ist, wo ν den Grad des Körpers bezeichnet, g und h die in der Einleitung erwähnten Konstanten.

Aus (15.) ergibt sich unter Benutzung von (16.) und (17.)

$$S_x = \sum_{k=1}^{\sqrt{x}} \mu(k)\left(gh\frac{x}{k} + O\left(\frac{x^{1-\frac{1}{\nu}}}{k^{1-\frac{1}{\nu}}}\right)\right) + \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} F(m)\, O\left(\frac{x}{m(\log x - \log m)^3}\right)$$

$$+ O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^3(\sqrt{x})}\right) O(\sqrt{x})$$

$$= ghx \sum_{k=1}^{\sqrt{x}} \frac{\mu(k)}{k} + O\left(x^{1-\frac{1}{\nu}}\right) O \sum_{k=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{k^{1-\frac{1}{\nu}}} + O\left(\frac{x}{(\log x - \log\sqrt{x})^3}\right) \cdot \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{F(m)}{m}$$

$$+ O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^3 x}\right) \cdot O(\sqrt{x}),$$

(18.) $$S_x = ghx \sum_{k=1}^{\sqrt{x}} \frac{\mu(k)}{k} + O\left(x^{1-\frac{1}{\nu}}\right) O\left(x^{\frac{1}{2\nu}}\right) + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \cdot \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{F(m)}{m} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).$$

Nun folgt aus (16.)

$$\sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} = -\sum_{k=x+1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = -\sum_{k=x+1}^{\infty} \frac{M(k) - M(k-1)}{k}$$

$$= -\sum_{k=x+1}^{\infty} M(k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{M(x)}{x+1}$$

$$= O\sum_{k=x+1}^{\infty} \frac{k}{\log^3 k}\,\frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right) = O\sum_{k=x+1}^{\infty} \frac{1}{k\log^3 k} + O\left(\frac{1}{\log^3 x}\right) = O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right),$$

also auch

(19.) $$\sum_{k=1}^{\sqrt{x}} \frac{\mu(k)}{k} = O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right);$$

---

*) „Über einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung". Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1896, S. 275–281.

ferner ist

$$\sum_{m=1}^{x}\frac{F(m)}{m}=\sum_{m=1}^{x}\frac{H(m)-H(m-1)}{m}=\sum_{m=1}^{x}\frac{H(m)}{m(m+1)}+\frac{H(x)}{x+1}=O\sum_{m=1}^{x}\frac{m}{m^2}+O\left(\frac{x}{x}\right)$$
$$=O\sum_{m=1}^{x}\frac{1}{m}+O(1)=O(\log x),$$

also a fortiori

$$\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\frac{F(m)}{m}=O(\log x). \tag{20}$$

Die Gleichungen (19.) und (20.) geben, in (18.) eingesetzt,

$$S_x=O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)+O\left(x^{1-\frac{1}{2\nu}}\right)+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)+O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)=O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right);$$

damit ist (13.), also die Behauptung

$$gh=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n} \tag{12.}$$

bewiesen.

Über Differenzengleichungen, die Fundamentallösungen besitzen.

(Von Herrn *A. Guldberg.*)

In der Theorie der Differenzengleichungen gibt es bekanntlich außer den linearen Differenzengleichungen keine Klasse von Gleichungen, die einigermaßen eingehend untersucht worden ist. Der Grund, daß die linearen Differenzengleichungen vorzugsweise einer näheren Untersuchung unterworfen sind, liegt bekanntlich darin, daß die allgemeine Lösung einer linearen homogenen Differenzengleichung n-ter Ordnung sich linear durch n beliebige, von einander unabhängige, partikuläre Lösungen ausdrücken läßt.

Wenn man daher der Integration der Differenzengleichungen näher treten will, so scheint es wohl angebracht zu sein, sich die Frage zu stellen: Welches sind die Differenzengleichungen, deren allgemeine Lösung sich durch eine bestimmte Anzahl partikulärer Lösungen ausdrücken läßt?

In den folgenden Zeilen erlaube ich mir, dieses Problem kurz zu besprechen.

Es sei folgendes System simultaner Differenzengleichungen vorgelegt:

$$\text{(I.)} \qquad \Delta y_i = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Eine allgemeine Lösung des simultanen Systems (I.) sei:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Wir verlangen nun, daß diese allgemeine Lösung $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sich vermittelst einer bestimmten irreduktiblen Anzahl partikulärer Lösungen:

$$(\alpha.) \qquad y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}; \quad y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}; \ldots\ldots; \quad y_{1p}, y_{2p}, \ldots, y_{np}$$

und n arbiträrer Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ durch ein bestimmtes Formelsystem:

$$(\text{II.}) \qquad y_i = f_i(y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}; \ldots; y_{1p}, \ldots, y_{np}; a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ausdrücken läßt, wo die f_i unverändert bleiben, wenn wir statt der partikulären Lösungen $(\alpha.)$ p willkürliche andere Lösungen substituieren.

Schreiben*) wir nun die Gleichungen (II.) in p verschiedenen Wertsystemen der arbiträren Konstanten a, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$(\beta.) \qquad \overline{y}_{ij} = f_i(y_{11}, \ldots, y_{n1}; \ldots; y_{1p}, \ldots, y_{np}; a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, p)$$

welche Gleichungen eine kontinuierliche einfache transitive Gruppe in den Veränderlichen $\overline{y}_{ij}$ und y_{ij} mit den Parametern $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ bilden.

Nach einem bekannten Theorem von *Sophus Lie* kann man aber, wenn eine vorgelegte Gruppe in den Veränderlichen y

$$y_i' = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n;\ a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

einfach transitiv ist, neue Parameter b von solcher Beschaffenheit einführen, daß man eine einfache transitive Gruppe in den Veränderlichen y' und b mit den Parametern y_i erhält. Dieses vorausgesetzt, denken wir uns die Parameter a in den Gleichungen $(\beta.)$ so gewählt, daß diese Gleichungen eine einfach transitive Gruppe mit den Veränderlichen $\overline{y}$ und a bilden. Definieren aber die Gleichungen

$$\overline{y}_{ij} = f_i(y_{11}, \ldots, y_{n1}; \ldots; y_{1p}, \ldots, y_{np};\ a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, p)$$

eine einfach transitive Gruppe in den Veränderlichen $\overline{y}$ und a, so definieren die Gleichungen

$$\overline{y}_i = f_i(y_{11}, \ldots, y_{n1}; \ldots; y_{1p}, \ldots, y_{np}; a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine p-fach transitive Gruppe in den Veränderlichen $\overline{y}$ und a mit den Parametern $y_{11}, \ldots, y_{np}$.

Wir haben also folgenden Satz:

Soll das System (I.) Fundamentallösungen besitzen, d. h. läßt die allgemeine Lösung $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sich durch eine bestimmte irreduktible Anzahl partikulärer Lösungen

*) Wir wenden ganz dasselbe Verfahren an, das man bei Differentialgleichungen, die Fundamentallösungen besitzen, benutzen kann.

(γ.) $$y_{11}, \ldots, y_{n1};\ y_{12}, \ldots, y_{n2};\ \ldots;\ y_{1p}, \ldots, y_{np}$$

und n willkürliche Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ immer auf dieselbe Weise:

(III.) $$y_i = f_i(y_{11}, \ldots, y_{n1};\ \ldots;\ y_{1p}, \ldots, y_{np};\ a_1, \ldots, a_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ausdrücken, wo die f unabhängig von der Wahl der partikulären Lösungen (γ.) sind, so definieren die Gleichungen (III.) eine kontinuierliche p-fach transitive Gruppe in den Veränderlichen y und a mit den Parametern $y_{11}, \ldots, y_{np}$.

Da eine endliche kontinuierliche Gruppe in n Veränderlichen höchstens $(n+2)$-fach transitiv ist, so darf p nur die Werte $1, 2, 3, \ldots, n+2$ annehmen.

Wir betrachten jetzt den Fall $n = 1$. Wir erhalten dann folgende drei Typen von Differenzengleichungen.

Die Differenzengleichung

$$y_x y_{x+1} + P y_{x+1} + Q y_x + R = 0,$$

deren allgemeine Lösung die Form hat:

$$y = \frac{y_3 (y_1 - y_2)\, a + y_1 (y_2 - y_3)}{(y_1 - y_2)\, a + y_2 - y_3}.$$

Die Differenzengleichung

$$y_{x+1} + P y_x + Q = 0,$$

deren allgemeine Lösung die Form hat:

$$y = \frac{a - a_2}{a_1 - a_2}\, y_1 + \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}\, y_2.$$

Die Differenzengleichung

$$y_{x+1} + P y_x = 0,$$

deren allgemeine Lösung die Form hat:

$$y = y_1 \cdot a.$$

In diesen Gleichungen bezeichnen P, Q, R Funktionen von x, die y_i partikuläre Lösungen und die a willkürliche Konstanten. Diese drei Typen von Differenzengleichungen erster Ordnung, die Fundamentallösungen besitzen, entsprechen vollständig den drei Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung, die Fundamentallösungen besitzen. Die erste Differenzengleichung entspricht sodann vollständig der *Riccati*schen Differentialgleichung.

Erstens läßt sie sich bekanntlich durch die Substitution

$$y_x = \frac{u_{x+1}}{u_x} - P$$

in die lineare Differenzengleichung 2. Ordnung

$$u_{x+2} + (Q(x) - P(x+1))\,u_{x+1} - (Q \cdot P - R)\,u_x = 0$$

überführen.

Zweitens: kennt man eine partikuläre Lösung derselben, so verifiziert man leicht, daß sich ihre Integration auf die Integration einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung reduziert. Drittens ist das Doppelverhältnis von irgend 4 partikulären Lösungen konstant.

Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage.

(Von Herrn *P. Bohl* in Riga.)

Die Bewegungen des mechanischen Systems, auf welches sich unsere Untersuchungen beziehen, mögen gemäß den sogenannten *Lagrange*schen Gleichungen zweiter Form (für den Fall der Existenz einer von der Zeit unabhängigen Kräftefunktion)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

verlaufen. Für $q_1 = q_1^0,\ q_2 = q_2^0, \ldots q_n = q_n^0$ sollen die rechten Seiten verschwinden, sodaß die entsprechende Position eine Gleichgewichtslage ist. Der Gültigkeitsbereich der hingeschriebenen Gleichungen erstrecke sich auf eine gewisse Umgebung Ω von $q_1^0, q_2^0, \ldots q_n^0$ und alle q_i'-Werte. In diesem Gültigkeitsbereich sei die lebendige Kraft

$$T = \sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu}\, q_\mu'\, q_\nu'.$$

Die $a_{\mu\nu}$ sowie die Kräftefunktion Π seien im Gebiete Ω definierte und mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehene Funktionen der q. Es gelte $T > 0$, wofern nicht alle q' gleichzeitig verschwinden.

Läßt man bezüglich der Koordinaten eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten zu, so kann man voraussetzen, daß

$$(a_{ii})_0 = \frac{1}{2}, \qquad q_1^0 = q_2^0 = \cdots = q_n^0 = 0$$

und, falls $\mu \gtrless \nu$,

$$(a_{\mu\nu})_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\mu \partial q_\nu}\right)_0 = 0$$

gilt, wobei der untere Index 0 darauf hindeutet, daß die betreffende Größe für $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0, \ldots q_n = q_n^0$ zu bilden ist. *Diese Annahme wollen wir in der Tat machen.* Ferner teilen wir die Koordinaten q in drei Gruppen. *Je nachdem nämlich* $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\mu^2}\right)_0$ *kleiner als* 0, *größer als* 0 *oder gleich* 0 *ist, wollen wir* q_μ *stabile, instabile oder singuläre Koordinate nennen.* Diese Namen sollen keine weitergehenden Behauptungen aussprechen.

Die Aufgabe, zu deren Lösung ich in dieser Arbeit einen Beitrag liefern möchte, kann vorläufig in folgender Weise formuliert werden: *Es soll die Existenz und Mannigfaltigkeit derjenigen Bewegungen festgestellt werden, welche für einen wenigstens einseitig unbegrenzten Zeitraum in der Nähe der Gleichgewichtslage verlaufen.* Wie diese Forderung hier aufgefaßt wird, geht genauer aus den später folgenden Angaben hervor. Bisher ist, soweit mir bekannt, die genannte Aufgabe nur gelöst worden unter der Annahme, daß entweder nur stabile Koordinaten oder nur instabile vorhanden sind. *Ich teile in dieser Arbeit die Lösung mit unter der alleinigen Voraussetzung, daß keine singulären Koordinaten vorkommen.* Diese Voraussetzung ist erfüllt, sobald die *Hesse*sche Determinante der Kräftefunktion für $q_1 = q_1^0$, $q_2 = q_2^0, \ldots q_n = q_n^0$, von Null verschieden ist.

Ich will nunmehr eine kurze Übersicht der hauptsächlichsten von mir gefundenen Resultate geben. Indem wir das Vorkommen singulärer Koordinaten ausschließen, unterscheiden wir drei Fälle.

1. *Es kommen nur stabile Koordinaten vor.* Auf Grund eines bekannten *Dirichlet*schen Satzes ergibt sich für diesen Fall Folgendes: Wie klein eine positive Zahl p auch gewählt sein möge, stets existiert eine entsprechende Zahl $e > 0$ von der Beschaffenheit, daß eine Bewegung, bei welcher einmal $|q_i| < e$, $|q_i'| < e$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ gilt, für alle größeren und kleineren t im Gültigkeitsbereich bleibt und stets $|q_i| < p$, $|q_i'| < p$ liefert.

2. *Es kommen nur instabile Koordinaten vor.* Dieser Fall ist unter engeren Voraussetzungen zunächst von *Kneser**) erledigt und später**) unter

---

*) *A Kneser*, Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen. Dieses Journal, Bd. 115 und 118. Auf diese *Kneser*sche Arbeit geht die obige Art der Problemstellung im Grunde zurück.

**) *P. Bohl*, Über gewisse Differentialgleichungen allgemeinen Charakters, die in der Mechanik Anwendung finden. Dorpat (Jurjew) 1900 (russisch) § 25, 26, 27. *Karstens*, Über gewisse asymptotische Lösungen der Differentialgleichungen der Mechanik, Berlin 1901.

allgemeineren Annahmen behandelt worden. Man kann in diesem Falle zwei im Gültigkeitsgebiete gelegene Gebiete

$$H: \quad -a < q_i < a, \qquad \eta: \quad -b < q_i < b$$
$$b < a, \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

derart angeben, daß Folgendes gilt: Aus einer beliebigen dem Gebiete η angehörigen Position kann das System in irgend einem Moment in einer und nur in einer Weise so in Bewegung gesetzt werden, daß es für alle größeren t im Gebiete H bleibt. Indem man die Anfangsposition genügend nahe der Gleichgewichtslage wählt, kann man erreichen, daß im weiteren Verlauf einer solchen Bewegung alle q_i und q_i' absolut beliebig klein bleiben. Bei jeder der genannten Bewegungen streben alle q_i und q_i' für $t \to \infty$ nach 0.*) Der Fall, in dem das System stets in der Gleichgewichtslage verharrt, ist der einzige, in welchem es für *alle* t in H bleibt.

3. *Es kommen stabile und instabile Koordinaten vor.* Die Untersuchung dieses Falles bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Liegt in diesem Fall eine genügend klein gewählte durch

$$-a_i < q_i < a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

definierte Umgebung M der Gleichgewichtslage vor, so gibt es immer unendlich viele Bewegungen, welche für genügend große t stets in M verbleiben. Wählt man sämtliche Koordinaten und die Geschwindigkeiten der *stabilen* Koordinaten absolut kleiner als gewisse M zugeordnete positive Zahlen, sonst aber völlig willkürlich, so existiert *eine und nur eine* Bewegung, welche in einem gegebenen Moment mit den vorgeschriebenen Koordinaten und Geschwindigkeiten beginnt und für größere t im Gebiete M bleibt. Indem man die Anfangskoordinaten und Anfangsgeschwindigkeiten der stabilen Koordinaten absolut genügend klein wählt, kann man erreichen, daß bei den eben charakterisierten Bewegungen sämtliche Koordinaten und sämtliche Geschwindigkeiten absolut beliebig klein bleiben.

Unter den genannten Bewegungen gibt es auch immer unendlich viele solche, welche für *alle* t in M bleiben. Wählt man die *stabilen* Koor-

---

In der erstgenannten Arbeit behandle ich auch den allgemeineren Fall, in welchem außer den oben eingeführten Kräften noch „störende Kräfte“ allgemeiner Natur zugelassen werden.

*) Das Zeichen $\to$ deutet in meiner Arbeit einen Grenzprozeß an.

dinaten und ihre Geschwindigkeiten absolut genügend klein sonst beliebig, so gibt es *eine und nur eine* Bewegung, welche in einem gegebenen Moment die vorgeschriebenen Werte der stabilen Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten besitzt und für *alle* t (größere und kleinere) in M bleibt. Indem man die Werte der stabilen Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten für den gegebenen Moment absolut genügend klein wählt, kann man erreichen, daß *sämtliche* Koordinaten und Geschwindigkeiten für alle t absolut beliebig klein sind.

Jeder Bewegung der letztgenannten Kategorie entsprechen unendlich viele Bewegungen, welche sich ihr für $t \to \infty$ asymptotisch in der Weise nähern, daß die mit $e^{p \cdot t}$ ($p > 0$ eine dem Gebiet M entsprechende Zahl) multiplizierten Unterschiede entsprechender für gleiche Zeiten genommener Koordinaten und Geschwindigkeiten für $t \to \infty$ nach 0 konvergieren.

Das Verhältnis der beiden oben charakterisierten Klassen von Bewegungen zu einander betrifft folgender Satz: Jede Bewegung, welche von einem Moment ab in einer genügend kleinen sonst beliebig gewählten Umgebung N der Gleichgewichtslage verbleibt, strebt für $t \to \infty$ asymptotisch nach einer Bewegung, die für *alle* t in einer gewissen N entsprechenden Umgebung P der Gleichgewichtslage bleibt, wobei die asymptotische Annäherung ähnlich wie in dem oben besprochenen Fall asymptotischer Annäherung geschieht. Durch die Wahl eines genügend kleinen N kann P beliebig klein gemacht werden.

Wir kehren wieder zu den für genügend große t in M bleibenden Bewegungen zurück, um bezüglich derselben weitere Aussagen zu machen.

Für sämtliche Bewegungen dieser Art ist die Konstante des Integrals der lebendigen Kraft $C = T - \Pi$ gleich oder größer als Null. Es gibt nur eine für *alle* t in M bleibende Bewegung, für welche $C = 0$; es ist dies diejenige Bewegung, bei der das System in der Gleichgewichtslage verharrt.

Unter den Bewegungen, welche für genügend große t in M bleiben, gibt es immer unendlich viele, für welche die stabilen Koordinaten für $t \to \infty$ nach 0 streben. Bei einer solchen Bewegung müssen dann auch *sämtliche* Koordinaten und *sämtliche* Geschwindigkeiten für $t \to \infty$ nach 0 streben. Dieses Konvergieren nach 0 geschieht *immer* in der Weise, daß die mit $e^{\alpha t}$ ($\alpha > 0$ eine Konstante, die kleiner ist als die den *instabilen* Koordinaten entsprechenden $\sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\mu^2}\right)_0}$) multiplizierten Koordinaten und Geschwindig-

keiten nach 0 streben. Das Ensemble der besprochenen Bewegungen fällt zusammen mit dem Ensemble derjenigen der für genügend große t in M bleibenden Bewegungen, für welche die Konstante des Integrals der lebendigen Kraft gleich Null ist. Wählen wir die *instabilen* Koordinaten absolut genügend klein, sonst willkürlich, so gibt es *eine und nur eine* Bewegung der in Rede stehenden Art, welche in einem gegebenen Moment mit den gewählten Koordinaten beginnt.

Sind diejenigen Größen $\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i^2}\right)_0$, welche *instabilen* Koordinaten entsprechen, sämtlich unter einander verschieden, so spielt für jede einzelne der in Rede stehenden Bewegungen (die Bewegung, bei welcher das System im Gleichgewichtszustande verharrt, wird ausgeschlossen) eine der *instabilen* Koordinaten q_ϱ die Rolle, daß

$$\operatorname*{Lim}_{t\to\infty} \frac{q_i}{q_\varrho} = \operatorname*{Lim}_{t\to\infty} \frac{q_i'}{q_\varrho} = \operatorname*{Lim}_{t\to\infty} \frac{q_i}{q_\varrho'} = \operatorname*{Lim}_{t\to\infty} \frac{q_i'}{q_\varrho'} = 0 \qquad (i \neq \varrho)$$

und ferner entweder

$$\operatorname*{Lim}_{t\to\infty} \frac{q_\varrho'}{q_\varrho} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\varrho^2}\right)_0}$$

oder

$$\operatorname*{Lim}_{t\to\infty} \frac{q_\varrho'}{q_\varrho} = -\sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\varrho^2}\right)_0}.$$

Für den Spezialfall, daß *nur eine* stabile Koordinate q_σ existiert, beweisen wir folgenden Satz: Man kann eine solche Umgebung der Gleichgewichtslage angeben, daß sämtliche Bewegungen, die für *alle* t in dieser Umgebung bleiben, *periodisch* verlaufen. Jede der genannten Bewegungen (mit Ausnahme derjenigen, bei welcher das System immer in der Gleichgewichtslage verharrt) besitzt eine kleinste Periode. Man kann die Umgebung so wählen, daß diese Perioden sich von

$$\frac{2\pi}{\sqrt{-\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_\sigma^2}\right)_0}}$$

beliebig wenig unterscheiden.

Es dürfte angemessen sein, an dieser Stelle einige Resultate zu erwähnen, die *Hadamard* in seiner Arbeit*) „Sur certaines propriétés des

*) Journ. de Math. (5e série), tome III 1897.

trajectoires en Dynamique“ gewonnen hat und die sich auf die Bewegungszustände in der Nähe einer Gleichgewichtslage beziehen. *Hadamard* schließt singuläre Koordinaten nicht aus und nimmt bloß an, daß wenigstens eine instabile Koordinate vorhanden ist. Es heißt in der genannten Abhandlung (S. 371):

Ainsi un mobile abandonné dans le voisinage d'une position d'équilibre où la fonction des forces n'est pas maxima s'en écarte d'une quantité finie. Il ne peut y avoir d'exception que: 1^0 pour les trajectoires telles que les écarts et les vitesses des paramètres par rapport auxquels il y a instabilité soient et restent très petits relativement aux écarts et aux vitesses des autres paramètres; 2^0 pour les trajectoires asymptotiques aux précédentes; 3^0 en particulier pour les trajectoires qui tendent asymptotiquement vers la position d'équilibre considérée ou une position d'équilibre très voisine, s'il en existe.

Hierzu möchte ich zunächst eine Bemerkung bezüglich der an zweiter Stelle genannten exzeptionellen Trajektorien machen. Die Bezeichnung „asymptotisch“ ist hier, wie mir scheint, in *anderem* Sinn gebraucht als in meiner Arbeit. Es soll meiner Meinung nach ausgedrückt werden, daß jede der in Rede stehenden Trajektorien mindestens zu einer Trajektorie der ersten Art in der Beziehung steht, daß sie jedem Punkt der letzteren mit der Zeit beliebig nahe kommt (vgl. No. 54 der Arbeit von *Hadamard*).

Mit der Frage der Existenz und Mannigfaltigkeit der hier erwähnten exzeptionellen Bewegungen beschäftigt sich übrigens *Hadamard nicht.*

Ferner heißt es am angegebenen Ort: Dans le cas où il n'y a que deux degrés de liberté et où la fonction de force est minima, *M. Kneser* a pu, par une méthode simple et élégante, constater la présence de trajectoires asymptotiques à la position d'équilibre. Il est clair que dans le cas général une discussion analogue serait beaucoup plus compliquée. Par exemple, il ne passe pas par un point quelconque du paraboloïde hyperbolique*) une trajectoire tendant asymptotiquement vers le sommet: la seule trajectoire présentant ce caractère est la parabole principale à concavité inférieure.

Das hier von *Hadamard* erwähnte Beispiel ordnet sich dem in meiner Arbeit erledigten Fall unter. Schreibt man nämlich die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids in der Form

*) Es handelt sich um die Bewegung eines schweren Punktes auf dieser Fläche, wobei die Achse vertikal ist.

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z,$$

indem man die positive z-Achse vertikal aufwärts gerichtet annimmt, und bezeichnet mit m die Masse des schweren Punktes, so können $\sqrt{m} \cdot x$ und $\sqrt{m} \cdot y$ die Rolle der Koordinaten q spielen und es ist dann $\sqrt{m} \cdot x$ stabile, $\sqrt{m} \cdot y$ instabile Koordinate. Man erkennt dann leicht die Übereinstimmung unserer Resultate mit den eben zitierten sowie den a. a. O. sich außerdem vorfindenden Angaben.

Werden singuläre Koordinaten zugelassen und wird bloß die Existenz wenigstens einer instabilen Koordinate vorausgesetzt (wie es bei *Hadamard* geschieht), so wäre es leicht, nach den in meiner Arbeit befolgten Methoden die *Existenz* von Bewegungen nachzuweisen, die der Gleichgewichtslage zustreben. Um aber ihre *Mannigfaltigkeit* (in dem Sinn, wie es oben bei Ausschluß singulärer Koordinaten geschah) festzustellen, genügt die bloße Kenntnis der „Glieder zweiter Ordnung“ von 2Π, d. h. der Form

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}\right)_0 q_1^2 + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}\right)_0 q_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n^2}\right)_0 q_n^2$$

nicht. Die Untersuchungen dieser Abhandlung bringen daher die Lösung des von uns ins Auge gefaßten Problems bei einer sich naturgemäß darbietenden vorläufigen Beschränkung.

Der besseren Übersicht wegen habe ich meine Arbeit in drei Kapitel geteilt. Das erste hat einen bloß vorbereitenden Charakter. Es handelt sich daselbst hauptsächlich um den Beweis folgenden Satzes:

Es sei ein Gebiet (G) $-a_i \leqq x_i \leqq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ *gegeben. In diesem Gebiet seien* $f_1, f_2, \ldots f_n$ *stetige Funktionen der* x, *die nicht gleichzeitig verschwinden. Dann gibt es eine Stelle* $u_1, u_2, \ldots u_n$ *der Umgrenzung von* G *der Art, daß*

$$f_i(u_1, u_2, \ldots u_n) = N \cdot u_i, \quad N < 0. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Als in diesem Satz enthalten kann folgender Satz aufgefaßt werden: *Es können nicht* n *im Gebiete* (G) $-a_i \leqq x_i \leqq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ *definierte und darin stetige Funktionen* $F_1, F_2, \ldots F_n$ *existieren, welche daselbst nicht gleichzeitig verschwinden und für die Stellen der Umgrenzung von* (G)

$$F_i = x_i \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

liefern.

Dieser Satz wird verallgemeinert und gelangt ebenfalls im Folgenden zur Anwendung.

Ich habe mich im ersten Kapitel auf dasjenige beschränkt, was für die Zwecke meiner Arbeit notwendig war und habe es vermieden, weitergehende Betrachtungen anzustellen. Immerhin möchte ich an dieser Stelle bemerken, daß mit Hülfe ähnlicher Betrachtungen, wie sie im ersten Kapitel vorkommen, folgender Satz bewiesen werden kann:

*Werden die Punkte einer Kugeloberfläche wieder in Punkte der Kugeloberfläche übergeführt und geschieht diese Überführung durch stetige Bewegung, welche den Mittelpunkt nicht berührt, so kehrt mindestens ein Punkt in seine frühere Lage zurück. Unter einer stetigen Bewegung ist hier eine Bewegung verstanden, bei welcher die rechtwinkligen Koordinaten stetige Funktionen der Zeit und der Anfangswerte sind.**)

Man kann diesen Satz leicht auf andere Oberflächen übertragen; auch ist eine Ausdehnung auf eine Mannigfaltigkeit von *ungerader* Dimensionszahl möglich. Sowohl der letzte Satz, wie auch der vorhergehende, können dazu dienen, periodische Lösungen von Differentialgleichungen nachzuweisen. Mit Hülfe des letztgenannten Theorems kann im Besonderen die Existenz periodischer Bewegungen (in weiterem Sinn) eines schweren starren Körpers erkannt werden. Wir wollen aber diesen, von anderem Standpunkt aus, mehrfach in Angriff genommenen Gegenstand hier nicht weiter verfolgen.

Die Methoden, welche in den beiden letzten Kapiteln zur Anwendung kommen, haben viel Ähnlichkeit mit denjenigen, welche ich in meiner oben erwähnten Arbeit „Über gewisse Differentialgleichungen etc.“ gebraucht habe. Als wesentlich neues Element tritt die Ausnutzung des hier vorhandenen Integrals der lebendigen Kraft auf. Ohne Zweifel könnte die Ausnutzung eines bekannten Integrals in der hier vorkommenden Richtung unter viel allgemeineren Voraussetzungen geschehen, als sie bei unserem Problem auftreten. Ich glaube aber, daß es sich empfiehlt, zunächst speziellere

*) Es handelt sich um einen rein analytisch formulierten Satz, den ich hier in geometrisch-mechanischer Einkleidung anführe. Ich erwähne denselben namentlich deshalb, weil sich mir so vielleicht die Gelegenheit bietet, zu erfahren, ob er in der Tat noch unbekannt ist. Der allbekannte Satz, daß der Übergang eines um einen festen Punkt drehbaren starren Körpers aus einer Position in eine andere immer durch Drehung um eine Achse bewerkstelligt werden kann, ist natürlich ein spezieller Fall des oben angeführten Satzes.

Probleme von hinreichendem Interesse zu behandeln. Auf diese Weise dürften am deutlichsten diejenigen Einzelheiten hervortreten, die bei einer event. späteren Verallgemeinerung zu umfassen sind. So habe ich z. B. die Absicht, demnächst ein anderes mechanisches Problem zu behandeln, dessen Charakter in oberflächlicher Weise angegeben werden kann, indem man sagt: Es kommen in demselben singuläre Koordinaten vor, die aber nicht auf eine Umgebung eines speziellen Systems derselben beschränkt sind, denen vielmehr das ganze reelle Gebiet als Spielraum zugewiesen wird.

Ich möchte schließlich bemerken, daß ich bestrebt gewesen bin, nach rein analytischer Formulierung des Problems dasselbe auch rein analytisch in einer Weise durchzuführen, welche den gegenwärtig berechtigten Anforderungen an Strenge genügt. Dieser Umstand möge die verhältnismäßig nicht geringe Ausdehnung dieser Abhandlung entschuldigen.

Kapitel I.

§ 1. Bemerkungen über eine Art der Interpolation.

I. Es liege ein Gebiet $a_i \leqq x_i \leqq a_i + h_i$ $(i = 1, 2, \ldots n;\ h_i > 0)$, welches wir mit G bezeichnen wollen, vor. Entsprechend den 2^n Ecken des Gebietes G (d. h. den 2^n Stellen, für welche $x_1 = a_1$ oder $a_1 + h_1$, $x_2 = a_2$ oder $a_2 + h_2, \ldots, x_n = a_n$ oder $a_n + h_n$ ist) seien 2^n Werte W gegeben. Ferner betrachten wir eine Funktion der Form

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots x_n) = a + bx_1 + cx_2 + dx_2\,x_1 + ex_3 + fx_3\,x_1 + gx_3\,x_2 \\ \qquad + hx_3\,x_2\,x_1 + \cdots + kx_n + lx_n\,x_1 + mx_n\,x_2 + \cdots + px_n\,x_{n-1}\,x_{n-2}\cdots x_1. \end{cases}$$

Man kann dann die Konstanten $a, b, c, \ldots p$ so wählen, daß f an den Ecken die vorgeschriebenen Werte annimmt. Dabei sind die Werte der Konstanten völlig bestimmt und die Funktion nimmt innerhalb G nur Werte an, welche nicht kleiner als der kleinste, nicht größer als der größte W-Wert sind.

Um dies zu beweisen,*) bilden wir $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$, $f(a_1 + h_1, a_2, \ldots a_n)$, $f(a_1, a_2 + h_2, a_3, \ldots a_n)$, $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3, \ldots a_n)$, $f(a_1, a_2, a_3 + h_3, a_4, \ldots a_n)$, $f(a_1 + h_1, a_2, a_3 + h_3, a_4, \ldots a_n)$, $f(a_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3, a_4, \ldots a_n)$, $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3, a_4, \ldots a_n)$, $f(a_1, a_2, a_3, a_4 + h_4, a_5, \ldots a_n), \ldots$, indem wir

*) Ich führe einen kurzen direkten Beweis an; die Richtigkeit der Behauptung folgt aber auch unmittelbar aus der allgemeinen Theorie der ganzen rationalen Funktionen.

in der rechten Seite von (1.) die entsprechenden Substitutionen ausführen. Wir schreiben die erhaltenen Ausdrücke unter einander und erhalten so im ganzen 2^n Reihen, die den 2^n Ecken entsprechen. Wir bilden dann die Determinante D_n der Koeffizienten der 2^n Größen $a, b, c, \dots p$. Die Elemente, welche den 2^{n-1} ersten Kolonnen und 2^{n-1} ersten Zeilen angehören, sind gleich den Elementen, welche den 2^{n-1} ersten Kolonnen und 2^{n-1} letzten Zeilen angehören. Die Elemente der 2^{n-1} letzten Kolonnen und 2^{n-1} ersten Zeilen gehen aus den Elementen der 2^{n-1} ersten Kolonnen und 2^{n-1} ersten Zeilen durch Multiplikation mit a_n hervor. Die Elemente der 2^{n-1} letzten Kolonnen und 2^{n-1} letzten Zeilen gehen aus den Elementen der 2^{n-1} ersten Kolonnen und 2^{n-1} letzten Zeilen durch Multiplikation mit a_n+h_n hervor. Subtrahiert man daher die Elemente der 2^{n-1} ersten Zeilen von den Elementen der 2^{n-1} letzten Zeilen, so erhält man anstatt der Elemente der 2^{n-1} ersten Kolonnen und 2^{n-1} letzten Zeilen 0, anstatt der Elemente der 2^{n-1} letzten Kolonnen und 2^{n-1} letzten Zeilen die Elemente der 2^{n-1} ersten Kolonnen und 2^{n-1} ersten Zeilen multipliziert mit h_n. Also ist $D_n = h_n^{(2^{n-1})} \cdot D_{n-1}^2$, wobei D_{n-1} aus $a_1, a_1+h_1, \dots a_{n-1}, a_{n-1}+h_{n-1}$ analog gebildet ist, wie D_n aus $a_1, a_1+h_1, \dots a_n, a_n+h_n$. Also

$$D_{n-1} = h_{n-1}^{(2^{n-2})} \cdot D_{n-2}^2, \qquad D_{n-1}^2 = h_{n-1}^{(2^{n-1})} \cdot D_{n-2}^{(2^2)},$$

$$D_n = h_n^{(2^{n-1})} \cdot h_{n-1}^{(2^{n-1})} \cdot D_{n-2}^{(2^2)} = h_n^{(2^{n-1})} \cdot h_{n-1}^{(2^{n-1})} \cdot h_{n-2}^{(2^{n-1})} \cdot D_{n-3}^{2^3} = \dots = [h_n \cdot h_{n-1} \dots h_1]^{(2^{n-1})}.$$

Da die $h > 0$ angenommen werden, so gilt $D_n \neq 0$. Damit ist bewiesen, daß die $a, b, \dots p$ in der Weise gewählt werden können, daß die Funktion die an den Ecken vorgeschriebenen Werte annimmt, und zwar ist diese Wahl eine bestimmte.

Da f in x_i linear ist, so liegt $f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$, wenn $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ eine Stelle in G ist, nicht außerhalb des durch

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{i-1}, a_i, \xi_{i+1}, \dots \xi_n) \quad \text{und} \quad f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{i-1}, a_i+h_i, \xi_{i+1}, \dots \xi_n)$$

gegebenen Intervalls. Indem man diese Bemerkung sukzessive anwendet, findet man:

$f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ liegt im Intervalle von $f(a_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ bis $f(a_1+h_1, \xi_2, \dots \xi_n)$, $f(a_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ liegt im Intervall von $f(a_1, a_2, \xi_3, \dots \xi_n)$ bis $f(a_1, a_2+h_2, \xi_3, \dots \xi_n)$, $f(a_1+h_1, \xi_1, \dots \xi_n)$ liegt im Intervall von $f(a_1+h_1, a_2, \xi_3, \dots \xi_n)$ bis

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \xi_3, \dots \xi_n);$$

$f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ liegt daher in dem Intervall, welches durch den kleinsten und den

größten der Werte $f(a_1, a_2, \xi_3, \dots \xi_n)$, $f(a_1, a_2+h_2, \xi_3, \dots \xi_n)$, $f(a_1+h_1, a_2, \xi_3, \dots \xi_n)$, $f(a_1+h_1, a_2+h_2, \xi_3, \dots \xi_n)$ gebildet wird. Die letztgenannten 4 Werte schließen wir wieder analog dem Vorigen in Intervalle ein. So liegt z. B. $f(a_1, a_2, \xi_3, \dots \xi_n)$ in dem Intervall, das durch $f(a_1, a_2, a_3, \xi_4, \dots \xi_n)$ und $f(a_1, a_2, a_3+h_3, \xi_4, \dots \xi_n)$ gebildet wird. So weiter schließend erhält man folgendes Resultat: $f(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ ist in dem Intervall gelegen, das durch den größten und den kleinsten der Werte, die f an den Ecken annimmt, bestimmt ist. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

II. Es seien zwei Funktionen

$$f_1 = a + bx_1 + cx_2 + dx_1 x_2 + ex_3 \dots,$$
$$f_2 = \alpha + \beta x_1 + \gamma x_2 + \delta x_1 x_2 + \varepsilon x_3 \dots$$

gegeben. Bezüglich derselben sei bekannt, daß sie für alle Stellen

$$x_i = p,\ x_1 = a_1 \text{ oder } = a_1+h_1, \dots, x_n = a_n \text{ oder } = a_n+h_n$$

übereinstimmen. Hierbei sind

$$p, a_1, a_2, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_n, h_1, h_2, \dots h_{i-1}, h_{i+1}, \dots h_n$$

gegebene Zahlen, von denen die h größer als Null sind.

Dann stimmen die beiden Funktionen an allen Stellen, für welche $x_i = p$ gilt, überein.

Für $x_i = p$ haben wir nämlich

$$f_1 = A + Bx_1 + Cx_2 + Dx_2 x_1 + \cdots \quad (x_i \text{ kommt nicht vor}),$$
$$f_2 = \mathcal{A} + Bx_1 + \Gamma x_2 + \Delta x_2 x_1 + \cdots \quad (x_i \text{ kommt nicht vor}).$$

Die übereinstimmenden Werte für $x_1 = a_1$ oder $a_1+h_1, \dots, x_n = a_n$ oder a_n+h_n (der Index i ist ausgeschlossen) bestimmen dann nach dem Vorigen $A, B \dots$ und $\mathcal{A}, B \dots$ in übereinstimmender Weise. Damit ist die Richtigkeit unserer Bemerkung erwiesen.

III. Es liege ein Gebiet G und eine Funktion f derart wie in I vor. Wir bilden

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n) = \frac{f(x_1, \dots x_{i-1}, a_i+h_i, x_{i+1}, \dots x_n) - f(x_1, \dots x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots x_n)}{h_i}$$
$$= A + Bx_1 + Cx_2 + Dx_2 x_1 + \cdots + Lx_n x_{n-1} \dots x_1,$$

wobei x_i in dem Ausdruck $S = A + Bx_1 + \cdots + Lx_n x_{n-1} \dots x_1$ nicht vorkommt. S liegt für die Stellen des Gebietes G in dem Intervall, das durch den größten

und den kleinsten der Werte gebildet wird, die S an den Ecken des Gebietes H

$$a_1 \leqq x_1 \leqq a_1+h_1, \dots a_n \leqq x_n \leqq a_n+h_n$$ (der Index i ist ausgeschlossen)

annimmt.

Also liegt auch $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *für die Stellen von* G *in dem Intervall, das durch den größten und den kleinsten der Werte gebildet wird, die* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *an den Ecken des Gebietes* H *annimmt.*

§ 2. Über ein gewisses Integral.

Im Gebiete M $p_i \leqq x_i \leqq p_i+s_i$ $(i=1, 2, \dots n;\ s_i>0)$ seien n stetige Funktionen $F_1, F_2, \dots F_n$ gegeben. Für $x_i=p_i$ oder $x_i=p_i+s_i$ mögen dieselben stetige Ableitungen erster Ordnung nach $x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n$ besitzen; und zwar soll dies für jeden Wert des Index i gelten. Endlich sollen $F_1, F_2, \dots F_n$ im Gebiet M nicht gleichzeitig verschwinden. Wir setzen*)

$$P=\sqrt{F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2}.$$

Ferner wollen wir den Teil der Umgrenzung von M, für den $x_i=p_i+s_i$ resp. $x_i=p_i$ ist, den positiven resp. negativen i-ten Begrenzungsteil nennen. Für die i-ten Begrenzungsteile hat

$$\alpha_i=(-1)^i \begin{vmatrix} F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{i+1}} \cdots \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ F_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_2}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_{i+1}} \cdots \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots \\ F_n \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial F_n}{\partial x_{i+1}} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

einen bestimmten Sinn.

Indem wir $dx_1\, dx_2 \dots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \dots dx_n$ der Kürze wegen durch das Zeichen $d\sigma_i$ ersetzen, bilden wir

$$V=\int_{(\pi)} \frac{\alpha_1}{P^n} d\sigma_1+\int_{(\pi)} \frac{\alpha_2}{P^n} d\sigma_2+\cdots+\int_{(\pi)} \frac{\alpha_n}{P^n} d\sigma_u$$

$$-\int_{(\nu)} \frac{\alpha_1}{P^n} d\sigma_1-\int_{(\nu)} \frac{\alpha_2}{P^n} d\sigma_2-\cdots-\int_{(\nu)} \frac{\alpha_\nu}{P^n} d\sigma_n,$$

*) Die Quadratwurzeln sind in dieser Arbeit stets nicht negativ zu nehmen.

wobei $\int\limits_{(\pi)} \frac{a_i}{P^n}\, d\sigma_i$ sich auf den positiven i-ten Begrenzungsteil erstreckt, $\int\limits_{(\nu)} \frac{a_i}{P^n}\, d\sigma_i$ auf den negativen i-ten Begrenzungsteil.

Wir behaupten, daß $V=0$ ist. Um die Richtigkeit dieser Behauptung*) zu beweisen, werde versuchsweise angenommen, es sei $V \neq 0$. Wir setzen dann $|V| = \delta > 0$.

Aus unseren Voraussetzungen folgt, daß, wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ absolut kleiner sind als eine gewisse feste positive Zahl L, dann stets

$$\sqrt{(F_1+\varepsilon_1)^2+\cdots+(F_n+\varepsilon_n)^2} > 0$$

gilt. Indem wir unter den im Folgenden vorkommenden η Größen verstehen, die vorläufig nur der Bedingung $|\eta| < L$ unterworfen werden, bilden wir für die i-ten Begrenzungsteile:

$$\beta_i = \frac{(-1)^i \begin{vmatrix} F_1+\eta_{11} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\eta_{12}\cdots\frac{\partial F_1}{\partial x_{i-1}}+\eta_{1i}\frac{\partial F_1}{\partial x_{i+1}}+\eta_{1i+1}\cdots\frac{\partial F_1}{\partial x_n}+\eta_{1n} \\ F_2+\eta_{21} \frac{\partial F_2}{\partial x_1}+\eta_{22}\cdots\frac{\partial F_2}{\partial x_{i-1}}+\eta_{2i}\frac{\partial F_2}{\partial x_{i+1}}+\eta_{2i+1}\cdots\frac{\partial F_2}{\partial x_n}+\eta_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n+\eta_{n1} \frac{\partial F_n}{\partial x_1}+\eta_{n2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_{i-1}}+\eta_{ni}\frac{\partial F_n}{\partial x_{i+1}}+\eta_{ni+1}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}+\eta_{nn} \end{vmatrix}}{[\sqrt{(F_1+\eta_1)^2+(F_2+\eta_2)^2+\cdots+(F_n+\eta_n)^2}]^n}$$

und zwar bezieht sich das Gesagte auf jeden der Werte $i = 1, 2, \ldots n$.

Wir setzen nun der Kürze wegen

$$\varrho = \frac{\delta}{2 s_1 s_2 \ldots s_n \left[\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_n}\right]}.$$

Man kann nunmehr eine solche Zahl $K > 0$ finden, daß, wenn $|\varepsilon_1|, \ldots |\varepsilon_n|$ und alle $|\eta|$ kleiner sind als K, folgendes gilt:

$$\sqrt{(F_1+\varepsilon_1)^2+\cdots+(F_n+\varepsilon_n)^2} > 0$$

für alle $x_1, x_2, \ldots x_n$ des Gebietes M und

$$\left|\frac{a_i}{P^n} - \beta_i\right| < \varrho$$

für die beiden i-ten Begrenzungsteile $(i = 1, 2, \ldots n)$.

*) Das Hauptgewicht ist bei ihr auf die Bedingungen zu legen, unter denen sie aufgestellt wird.

Wir teilen nun M in Zellen mit Hilfe der Mannigfaltigkeiten

$$x_i = p_i + \frac{s_i}{\nu},\ x_i = p_i + \frac{2s_i}{\nu},\ \cdots,\ x_i = p_i + \frac{\nu-1}{\nu} s_i. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Ist die positive ganze Zahl ν genügend groß gewählt, so haben wir folgendes:

1. Zwei Werte von F_i für zwei Stellen einer Zelle unterscheiden sich um weniger als K.

2. Die Werte von $\frac{\partial F_i}{\partial x_\mu}$ für zwei Stellen, die in einer Zelle liegen und der Mannigfaltigkeit angehören, welche durch die Begrenzungsteile mit Ausnahme der μ-ten gebildet wird, unterscheiden sich um weniger als K.

Mit Hilfe der Werte, welche F_i an den Ecken der Zellen annimmt, bilden wir nunmehr gemäß § 1 Funktionen f_i für jede einzelne Zelle.

Wir fassen nun eine Zelle ins Auge. $R, a_1, a_2, \ldots a_n$ mögen aus den $f_1, f_2, \ldots f_n$ ebenso gebildet sein, wie $P, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ aus den $F_1, F_2, \ldots F_n$. f_i liegt für die genannte Zelle in dem Intervall, das durch den größten und den kleinsten der Werte gebildet wird, welche F_i an den Ecken der Zelle annimmt, also auch in dem Intervall, das durch den größten und den kleinsten der Werte gebildet wird, die F_i in der Zelle annimmt. Da zwei Werte von F_i in der Zelle sich um weniger als K unterscheiden, so folgt, *daß f_i für irgend eine Stelle der Zelle und F_i für eine ev. andere Stelle der Zelle sich um weniger als K unterscheiden.* Hieraus ergibt sich zunächst, daß $f_1, f_2, \ldots f_n$ niemals gleichzeitig verschwinden (vgl. S. 191). $\frac{a_1}{R^n}, \cdots \frac{a_n}{R^n}$ haben daher einen bestimmten Sinn. Bekanntlich*) gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{a_i}{R^n}\right) = 0.$$

Hieraus folgt

$$0 = W = \int_{II} \frac{a_1}{R^n} d\sigma_1 + \cdots + \int_{II} \frac{a_n}{R^n} d\sigma_n - \int_{N} \frac{a_1}{R^n} d\sigma_1 - \cdots - \int_{N} \frac{a_n}{R^n} d\sigma_n,$$

wobei

$$\int_{II} \frac{a_i}{R^n} d\sigma_i \text{ resp. } \int_{N} \frac{a_i}{R^n} d\sigma_i$$

sich über den positiven resp. den negativen i-ten Begrenzungsteil der Zelle erstrecken.

---

*) Vgl. etwa *Picard*, Traité d'analyse I S. 124 (1. Auflage).

Richtet man sein Augenmerk nunmehr auf alle Zellen, so sieht man, daß immer je zwei Begrenzungsteile zusammenfallen, wobei der eine einen positiven, der andere einen negativen i-ten Begrenzungsteil bildet. Eine Ausnahme findet nur statt für die Begrenzungsteile, die auf der Grenze von M liegen. Diese kommen nur einfach vor.

Summiert man nun die Größen W für alle Zellen, so heben sich die Integrale auf mit Ausnahme derjenigen, die sich auf Zellenbegrenzungsteile erstrecken, welche auf der Grenze von M liegen. Die Summe Σ der letzteren Integrale mit dem gehörig gewählten Zeichen ist daher gleich 0.

Wir wollen nun den positiven i-ten Begrenzungsteil von M ins Auge fassen und den Beitrag, den er zu V (vgl. S. 190) liefert. Es ist dies

$$\int_{\pi} \frac{\alpha_i}{P^n} d\sigma_i.$$

Dieses letztere Integral kann in eine Summe von Integralen derselben Form zerfällt werden, die sich über die positiven i-ten Begrenzungsteile derjenigen Zellen erstrecken, deren i-te positive Begrenzungsteile den i-ten positiven Begrenzungsteil von M liefern.

Wir fassen eines dieser letzteren Integrale ins Auge. Man erhält dafür

$$\frac{s_1}{\nu} \cdot \frac{s_2}{\nu} \cdots \frac{s_{i-1}}{\nu} \frac{s_{i+1}}{\nu} \cdots \frac{s_n}{\nu} \left\{\frac{\alpha_i}{P^n}\right\},$$

wobei $\left\{\frac{\alpha_i}{P^n}\right\}$ für eine Stelle des Integrationsgebietes gebildet ist. Nun ziehen wir das entsprechende mit Hilfe der f gebildete Integral zum Vergleich heran. Dasselbe ist gleich

$$\frac{s_1}{\nu} \cdot \frac{s_2}{\nu} \cdots \frac{s_{i-1}}{\nu} \frac{s_{i+1}}{\nu} \cdots \frac{s_n}{\nu} \left[\frac{\alpha_i}{R^n}\right],$$

wobei $\left[\frac{\alpha_i}{R^n}\right]$ für eine Stelle des Integrationsgebietes gebildet ist. Nach S. 190 liegt irgend eine der Ableitungen von $f_1, \ldots f_n$ nach $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ für irgend eine Stelle des Integrationsgebietes in dem Intervall, das durch den größten und den kleinsten der Werte gebildet wird, welche die betreffende Ableitung an den Ecken des Integrationsgebietes annimmt.

Man schließt weiter aus dem Umstand, daß die f in jeder einzelnen Variabeln linear sind und daß die Werte der entsprechenden f und F an den Ecken übereinstimmen, folgendes: Die Ableitungen der f an den Ecken

sind gleich den entsprechenden Ableitungen der F *für gewisse Stellen des Integrationsgebietes.*

Somit liegt $\frac{\partial f_r}{\partial x_q}$ $(q \neq i)$ für irgend eine Stelle des Integrationsgebietes in dem Intervall, das durch den kleinsten und den größten der Werte gebildet ist, welche $\frac{\partial F_r}{\partial x_q}$ im Integrationsgebiet annimmt. Da die letzteren Werte sich um weniger als K unterscheiden, *so unterscheidet sich* $\frac{\partial f_r}{\partial x_q}$ *für irgend eine Stelle des Integrationsgebietes von* $\frac{\partial F_r}{\partial x_q}$ *für irgend eine (ev. andere) Stelle des Integrationsgebietes um weniger als* K.

Erinnert man sich nun an das, was S. 191 und 192 gesagt wurde, so sieht man, daß

$$\left|\left[\frac{a_i}{R^n}\right]-\left\{\frac{\alpha_i}{P^n}\right\}\right|<\varrho.$$

Daher unterscheiden sich die beiden verglichenen Integrale um weniger als

$$\varrho\cdot\frac{s_1\cdot s_2\ldots s_{i-1}\,s_{i+1}\ldots s_n}{\nu^{n-1}}.$$

Es unterscheidet sich daher

$$\int_{(\pi)}\frac{\alpha_i}{P^n}\,d\sigma_i$$

von der Summe der Integrale, die zum Vergleich herangezogen wurden, um weniger als

$$\nu^{n-1}\cdot\varrho\cdot\frac{s_1\,s_2\ldots s_{i-1}\,s_{i+1}\ldots s_n}{\nu^{n-1}}=\varrho\,\frac{s_1\,s_2\ldots s_i\ldots s_n}{s_i}.$$

Entsprechende Untersuchungen gelten für den negativen i-ten Begrenzungsteil. Man erhält schließlich das Resultat, daß V sich von Σ (vgl. S. 193) um weniger als

$$2\varrho\,s_1\,s_2\ldots s_n\left[\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_n}\right]=\delta$$

(vgl. S. 191) unterscheidet. Da aber $\Sigma=0$ ist, so unterscheidet sich V von 0 um weniger als δ. Also ist $|V|<\delta$, was einen Widerspruch zu der S. 191 gemachten Annahme $|V|=\delta$ darstellt. *Somit folgt, daß in der Tat, wie S. 191 behauptet wurde,* $V=0$ *ist.*

§ 3. Beweis einiger im Folgenden benutzten Sätze.

I. *Es können nicht n im Gebiete* (G) $-a_i \leqq x_i \leqq a_i$ $(i=1,2,\dots n;\ a_i>0)$ *definierte und darin stetige Funktionen* $F_1, F_2, \dots F_n$ *existieren, welche daselbst nicht gleichzeitig verschwinden und für die Stellen der Umgrenzung von* (G) $F_i = x_i$ $(i=1,2,\dots n)$ *liefern.*

Um dies zu beweisen, nehmen wir versuchsweise an, es seien die genannten Annahmen erfüllt. Dann hätten wir nach dem vorigen Paragraphen

$$\Sigma\Big[\int_{(n)} \frac{a_i}{P^n}\, d\sigma_i - \int_{(\nu)} \frac{a_i}{P^n}\, d\sigma_i\Big] = 0,$$

wobei die Bezeichnungen denen auf S. 190 entsprechen und (G) die Rolle von M im vorigen Paragraphen spielt.

Nun ist aber auf der Begrenzung

$$P = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \qquad \alpha_i = -x_i,$$

$$\int_{(n)} \frac{\alpha_i}{P^n}\, d\sigma_i - \int_{(\nu)} \frac{\alpha_i}{P^n}\, d\sigma_i = \int \frac{-2a_i\, d\sigma_i}{(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + a_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2})^n},$$

wobei das letzte Integral sich auf den positiven i-ten Begrenzungsteil erstreckt. Daher ergibt sich für die betrachtete Summe nicht Null, sondern ein negatives Resultat. Somit sind wir zu einem Widerspruch gelangt und müssen unsere versuchsweise gemachte Annahme fallen lassen. Unser Satz ist daher bewiesen.

II. $F_1, \dots F_n$ *seien im Gebiete* (G) $-a_i \leqq x_i \leqq a_i$ $(i=1,2,\dots n;\ a_i>0)$ *stetige Funktionen. Für die Umgrenzung sei* $F_i = x_i$ $(i=1,2,\dots n)$. $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ *sei ein System, das eine Stelle von* (G) *darstellt. Es gibt dann eine Stelle in* (G), *für welche* $F_i = \gamma_i$ $(i=1,2,\dots n)$ *ist.*

Beweis. Liegt $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ auf der Grenze von (G), so ist die Bemerkung offenbar richtig. Es handelt sich also nur noch um *innere* Stellen von (G). Wir bilden für jede Stelle von (G) eine Größe λ nach folgender Regel: Ist für die genannte Stelle $|F_i| < a_i$ $(i=1,2,\dots n)$, so gilt

$$\lambda = \prod_{i=1,2,\dots n} \frac{a_i^2 - F_i^2}{a_i^2 - \gamma_i^2};$$

in jedem andern Fall ist $\lambda = 0$. Man erkennt leicht die *Stetigkeit* von λ.

Wir bilden nun die stetigen Funktionen $\varphi_i = F_i - \lambda\gamma_i$, welche auf dem Rande von (G) mit den x_i zusammenfallen. Nach dem im ersten Teile dieses Paragraphen bewiesenen Satz gibt es also in (G) mindestens eine

Stelle, für welche die φ alle verschwinden. Dieselbe liegt offenbar nicht auf der Umgrenzung von (G). Für diese Stelle gilt also $F_i = \lambda \cdot \gamma_i$ $(i = 1, 2, \dots n)$. Es ist dabei $\lambda \neq 0$, denn andernfalls wären alle F gleich 0 und daher

$$\lambda = \Pi \frac{a_i^2}{a_i^2 - \gamma_i^2} > 0.$$

Mithin gilt für die genannte Stelle (vgl. die Definition von λ)

$$|F_i| < a_i, \quad (i = 1, 2, \dots n), \qquad \lambda = \Pi \frac{a_i^2 - F_i^2}{a_i^2 - \gamma_i^2} > 0.$$

Wäre nun $\lambda > 1$, so hätte man

$$\lambda = \Pi \frac{a_i^2 - \lambda^2 \gamma_i^2}{a_i^2 - \gamma_i^2} \lessgtr 1,$$

also einen Widerspruch. Wäre $\lambda < 1$, so hätte man

$$\lambda = \Pi \frac{a_i^2 - \lambda^2 \gamma_i^2}{a_i^2 - \gamma_i^2} \gtrless 1,$$

also einen Widerspruch. Mithin ist $\lambda = 1$ und $F_i = \gamma_i$ $(i = 1, 2, \dots n)$; q. e. d.

III. Aus dem Gebiet A, welches alle reellen Werte von $x_1, \dots x_n$ umfaßt, sei eine abgeschlossene Menge M gewählt. Die Koordinaten ihrer Stellen mögen zwischen endlichen Grenzen liegen. Sollten in beliebiger Nähe einer gewissen Stelle μ von M noch Stellen von A liegen, die M nicht angehören, so heiße μ eine Grenzstelle von M, andernfalls eine innere Stelle. Für alle Stellen von M seien n Funktionen $f_1, f_2, \dots f_n$ stetig gegeben. [Dies soll heißen: Sind $f_1^0, f_2^0, \dots f_n^0$ die Werte der Funktionen für eine Stelle μ_0 von M, so kann zu jeder positiven Zahl d eine andere $e > 0$ der Art gewählt werden, daß $|f_i' - f_i^0| < d$, sobald die Stelle μ', auf welche sich $f_1', f_2', \dots f_n'$ beziehen, von μ_0 um weniger als e absteht. Unter Entfernung zweier Stellen wird hierbei die Summe der absoluten Differenzen entsprechender Koordinaten verstanden.] Für die Grenzstellen seien $f_1, f_2, \dots f_n$ die Koordinaten der Stellen.

Ist nun $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ eine etwa vorhandene innere Stelle, so gibt es eine innere Stelle, für welche $f_i = \gamma_i$ $(i = 1, 2, \dots n)$.

Beweis. Wir wählen das Gebiet (G) $-a_i \leqq x_i \leqq a_i$ so, daß M *im Innern**) von (G) liegt. Wir ordnen nun jeder Stelle von (G) Funktionen

*) Hiermit soll darauf hingewiesen werden, daß die Umgrenzung von (G) ausgeschlossen wird.

$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ in folgender Weise zu. Ist die Stelle eine Stelle von M, so sei $\varphi_i = f_i$, andernfalls $\varphi_i = x_i$. Man erkennt leicht die Stetigkeit der φ im Gebiete (G). Für die Umgrenzung von (G) haben wir $\varphi_i = x_i \, (i = 1, 2, \dots n)$. Somit gibt es nach dem Satz, der im zweiten Teil dieses Paragraphen bewiesen wurde, eine Stelle von (G), wo

$$\varphi_i = \gamma_i. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

Diese Stelle muß eine Stelle von M sein. Andernfalls wäre für sie $\varphi_i = x_i \, (i = 1, 2, \dots n)$, während die $x_1, x_2, \dots x_n$ nicht mit dem System $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ zusammenfallen, da diese letzteren eine Stelle von M darstellen.

Es ist die genannte Stelle keine Grenzstelle von M, da für eine solche $\varphi_i = x_i \, (i = 1, 2, \dots n)$ und $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ eine innere Stelle ist. Also ist die genannte Stelle eine innere Stelle von M. Für eine solche ist

$$\varphi_i = f_i. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

Wir haben also $f_i = \gamma_i \, (i = 1, 2 \dots n)$; q. e. d.

§ 4. Folgerungen aus den Ergebnissen des § 3.

I. Es sei das Gebiet (G) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq R^2$ gegeben. Für jede Stelle des Gebietes seien $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ gegeben, und zwar mögen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ stetige Funktionen der x sein und nicht gleichzeitig verschwinden. Wir wählen nun eine Größe r gemäß der Bedingung $0 < r < R$, im übrigen beliebig, und definieren neue Funktionen $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ folgendermaßen: Für alle x des Gebietes $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq r^2$ mögen die ψ mit den ξ zusammenfallen. Für die Stellen des Gebietes $r^2 < x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq R^2$ mögen die ψ gegeben sein durch

$$\psi_i = \xi_i + \frac{\varrho - r}{R - r}(x_i - \xi_i), \qquad (i=1,2,\dots n)$$

wobei

$$\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Man erkennt leicht die Stetigkeit der ψ. Ferner sieht man, daß die ψ für eine Stelle der Umgrenzung von (G) sich auf $x_1, x_2, \dots x_n$ reduzieren. Es müssen daher nach § 3, III die ψ mindestens für eine Stelle von (G) gleichzeitig verschwinden. Dies kann keine Stelle des Gebietes $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq r^2$ sein, ist also eine Stelle des Gebietes $r^2 < x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq R^2$. Wir haben dann

$$\xi_i + \frac{\varrho - r}{R - r}(x_i - \xi_i) = 0, \qquad (R-\varrho)\,\xi_i + (\varrho - r)\,x_i = 0.$$

Offenbar ist *nicht* $R - \varrho = 0$. Also kann man schreiben

$$\xi_i = \nu \cdot x_i,\ \nu < 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$\nu = -\frac{|\xi_1| + |\xi_2| + \cdots + |\xi_n|}{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|}.$$

Nunmehr wählen wir $r_1, r_2, r_3, \ldots$ für r in der Weise, daß $r_1, r_2, r_3, \ldots \to R$. $x', x'', \ldots$ seien entsprechende wie vorhin gewählte x-Stellen. Man hat $\xi_i' = \nu' x_i'$ etc.

$$\nu' = -\frac{|\xi_1'| + |\xi_2'| + \cdots + |\xi_n'|}{|x_1'| + |x_2'| + \cdots + |x_n'|} \text{ etc.}$$

(Die hier benutzte Bezeichnung wird ohne weiteres verständlich sein.)

Die $x', x'', \ldots$ haben mindestens eine Häufungsstelle $X_1, X_2, \ldots X_n$. Man kann daher aus den Stellen $x', x'', \ldots$ eine Reihe von Stellen $\underline{x}, \underline{\underline{x}}, \underline{\underline{\underline{x}}}$ etc. so auswählen, daß sie nach der Stelle $X_1, X_2, \ldots X_n$ hin konvergieren. Da die den Stellen $x', x'', \ldots$ entsprechenden $\varrho', \varrho'', \ldots$ den Bedingungen

$$R \gtrless \varrho' > r_1, \qquad R \gtrless \varrho'' > r_2, \text{ etc.}$$

genügen, so konvergieren $\varrho', \varrho'', \ldots$ nach R. Dasselbe gilt von $\underline{\varrho}, \underline{\underline{\varrho}}, \underline{\underline{\underline{\varrho}}}$ etc., welche den Stellen $\underline{x}, \underline{\underline{x}}, \underline{\underline{\underline{x}}}$, etc. entsprechen. Andererseits konvergieren die $\underline{\varrho}, \underline{\underline{\varrho}}, \underline{\underline{\underline{\varrho}}}$, etc. nach $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$. Also ist $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2} = R$ und mithin liegt die Stelle $X_1, X_2, \ldots X_n$ auf der Begrenzung von (G). Man findet weiter: $\underline{\xi}, \underline{\underline{\xi}}, \ldots$ (welche $\underline{x}, \underline{\underline{x}}, \ldots$ entsprechen) konvergieren nach $\Xi_1, \Xi_2, \ldots \Xi_n$, d. h. dem ξ-System, welches $X_1, X_2, \ldots X_n$ entspricht. $\underline{\nu}, \underline{\underline{\nu}}, \ldots$ (d. h. die ν-Werte, welche $\underline{x}, \underline{\underline{x}}, \ldots$ entsprechen) konvergieren nach

$$N = -\frac{|\Xi_1| + |\Xi_2| + \cdots + |\Xi_n|}{|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|}.$$

Es ist also $\Xi_i = N X_i\ (i = 1, 2, \ldots n)$, $N < 0$.

Also gibt es eine Stelle (X) der Umgrenzung von (G), für welche die Gleichungen bestehen

$$\Xi_i = N X_i,\ N < 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

wobei die Ξ die Werte der ξ sind, welche der Stelle (X) entsprechen.

II. Es sei ein Gebiet (G) $-a_i \lessgtr x_i \lessgtr a_i\ (i = 1, 2, \ldots n)$ gegeben. In diesem Gebiet seien $f_1, f_2, \ldots f_n$ stetige Funktionen der x, die nicht gleichzeitig verschwinden.

Wir führen das Gebiet (H) $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqq 1$ ein. Deuten $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ auf eine Stelle der Umgrenzung von (G), $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0$ auf eine Stelle der Umgrenzung von (H), so werden durch die Gleichungen

$$\xi_i^0 = \frac{x_i^0}{\sqrt{x_1^{02}+x_2^{02}+\cdots+x_n^{02}}} \tag{1.}$$

die Punkte der Umgrenzungen paarweise eindeutig einander zugeordnet, wie leicht zu sehen. Die ξ^0 sind offenbar stetige Funktionen der x^0. Daß auch die $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ stetige Funktionen der $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0$ sind, beweisen wir in folgender Weise: Es mögen die $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0$ irgendwie nach der Stelle $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ auf der Umgrenzung von (H) konvergieren. Wir fassen bei diesem Prozeß die entsprechenden $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ ins Auge. Die Stellen, welche bei dem genannten Prozeß von den $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ geliefert werden, haben mindestens eine Häufungsstelle auf der Umgrenzung von (G). Man sieht aber leicht, daß nur *eine* derartige Häufungsstelle vorhanden ist, und zwar sind ihre Elemente nichts anderes als diejenigen $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$, welche $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ entsprechen. Es seien nämlich $y_1, y_2, \ldots y_n$ die Elemente einer Häufungsstelle. Dann kann man aus den Stellen, welche $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0$ bei dem Konvergenzprozeß der Reihe nach darstellen, eine Reihe von Stellen $[\xi]', [\xi]''$, etc. derart wählen, daß die entsprechenden $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$-Stellen nach der Stelle $y_1, y_2, \ldots y_n$ konvergieren. Da aber bei dem Konvergenzprozeß stets die Beziehungen (1.) (siehe oben) bestehen, so folgt

$$\eta_i = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}}.$$

Es sind somit $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ und $y_1, y_2, \ldots y_n$ entsprechende Stellen. Aus dem eben bewiesenen Umstand, daß es nur eine Häufungsstelle der genannten Art gibt, wobei die Elemente derselben $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ entsprechen, folgt, daß bei dem oben beschriebenen Prozeß $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ nach $y_1, y_2, \ldots y_n$ konvergieren, wobei $y_1, y_2, \ldots y_n$ diejenigen $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ sind, welche $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ entsprechen. Damit ist die behauptete Stetigkeit der als Funktionen von $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0$ betrachteten $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ bewiesen.

Wir setzen: $x_i^0 = \varphi_i(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots \xi_n^0)$. Nunmehr wollen wir das Gebiet (H) ins Auge fassen und für den Augenblick die Stelle $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ausschließen. Das dann erhaltene Gebiet sei (H'). Jeder Stelle $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ von (H') ordnen wir eine Stelle von (G) zu und zwar durch die Gleichungen

$$x_i = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}\,\varphi_i\Big(\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}},\cdots\frac{\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}}\Big).$$

Die x sind stetige Funktionen der ξ. Mit Berücksichtigung des Umstandes, daß die φ zwischen endlichen Grenzen liegen, erkennt man, daß, wenn $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ alle nach 0 streben, auch alle x nach 0 konvergieren. Ordnet man daher schließlich der Stelle $\xi_1 = \xi_2 = \cdots \xi_n = 0$ die Stelle $x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0$ zu, so hat man den Stellen von (H) Stellen von (G) so zugeordnet, daß die x stetige Funktionen der ξ sind. Diese Funktionen seien $[x_1], [x_2], \ldots [x_n]$. Weiter ordnen wir einer Stelle von (H) die $f_i([x_1], [x_2], \ldots [x_n])$ zu. Dieselben sind in den ξ stetig und verschwinden nicht gleichzeitig. Also gibt es eine solche Stelle $\Xi_1, \Xi_2, \ldots \Xi_n$ auf der Umgrenzung von (H), daß

$$f_i([X_1], [X_2], \ldots [X_n]) = \nu \cdot \Xi_i,\ \nu < 0,$$

wobei $[X_1], [X_2], \ldots [X_n]$ die Werte der $[x_1], [x_2], \ldots [x_n]$ für die Stelle $\Xi_1, \Xi_2, \ldots \Xi_n$ sind. Nun haben wir

$$[X_i] = \sqrt{\Xi_1^2+\Xi_2^2+\cdots+\Xi_n^2}\,\varphi_i\Big(\frac{\Xi_1}{\sqrt{\Xi_1^2+\Xi_2^2+\cdots+\Xi_n^2}},\cdots\frac{\Xi_n}{\sqrt{\Xi_1^2+\Xi_2^2+\cdots+\Xi_n^2}}\Big).$$

Also

$$[X_i] = \varphi_i(\Xi_1, \ldots \Xi_n).$$

Nach S. 199 folgt nun

$$\Xi_i = \frac{[X_i]}{\sqrt{[X_1]^2+[X_2]^2+\cdots+[X_n]^2}}.$$

Mithin

$$f_i([X_1][X_2], \ldots [X_n]) = \frac{\nu\cdot[X_i]}{\sqrt{[X_1]^2+[X_2]^2+\cdots+[X_n]^2}}.$$

$[X_1], [X_2], \ldots [X_n]$ ist eine Stelle der Umgrenzung von (G). *Also gibt es eine solche Stelle $u_1, u_2, \ldots u_n$ der Umgrenzung von (G), daß*

$$f_i(u_1, u_2, \ldots u_n) = N\cdot u_i,\ N<0. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Der Satz bleibt natürlich richtig, wenn man an Stelle von $N<0$ $N>0$ setzt.

Kapitel II.

§ 5. Die zu Grunde liegenden Gleichungen und unmittelbare Folgerungen aus ihnen.

Es seien die *Lagrange*schen Gleichungen der zweiten Form für den Fall der Existenz einer Kräftefunktion

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_i'} - \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \qquad (i=1,2,\dots n)$$

gegeben. Hierbei bedeuten die ω die allgemeinen Koordinaten, welche zur Bestimmung der Position des Systems dienen. T, die lebendige Kraft, ist gegeben durch

$$T = \Sigma A_{rs}\,\omega_r'\,\omega_s'.$$

Hierbei stellen die A-Koeffizienten Funktionen der ω für eine gewisse Umgebung einer Stelle $\omega_{10}, \omega_{20}, \dots \omega_{n0}$ dar und sind in diesem Gebiet stetig sowie mit stetigen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung versehen. Die Kräftefunktion U sei in einer Umgebung von $\omega_{10}, \omega_{20}, \dots \omega_{n0}$ eine stetige und mit stetigen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung versehene Funktion der ω. Wir nehmen an, daß $T>0$ ist, wenn die ω einer gewissen Umgebung von $(\omega_{10}, \omega_{20}, \dots \omega_{n0})$ angehören und die ω' nicht alle gleichzeitig verschwinden. Für $\omega_1=\omega_{10}, \omega_2=\omega_{20}, \dots \omega_n=\omega_{n0}$ mögen die $\frac{\partial U}{\partial \omega}$ verschwinden, sodaß also $(\omega_{10}, \omega_{20}, \dots \omega_{n0})$ eine Gleichgewichtslage darstellt.

Indem man, wenn nötig, eine lineare Transformation der Koordinaten vornimmt und zu U eine geeignete Konstante hinzufügt, gelangt man zu folgenden Voraussetzungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_i'} - \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \frac{\partial U}{\partial \omega_i}, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

$$2T = \omega_1'^2 + \omega_2'^2 + \dots + \omega_n'^2 + \sum_{rs} a_{rs}\omega_r'\omega_s',$$

$$2U = \gamma_1\omega_1^2 + \gamma_2\omega_2^2 + \dots + \gamma_n\omega_n^2 + \varphi.$$

Hierbei sind φ und die a_{rs} für eine gewisse Umgebung der Stelle

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0$$

stetige Funktionen der ω mit stetigen Differentialquotienten 1-ter und 2-ter Ordnung. Für $\omega_1=\omega_2=\dots=\omega_n=0$ gilt: $a_{rs}=\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_\mu}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_\lambda\,\partial\omega_\mu}=0.$

$\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ sind Konstanten. Wir haben nur dann $T=0$, wenn alle $\omega'=0$ sind, sonst $T>0$. Je nachdem γ_i negativ, positiv oder null ist, soll ω_i stabile, instabile oder singuläre Koordinate heißen. Diese Benennungen sollen keinerlei weitergehende Behauptungen vertreten. *Wir machen die Annahme, daß keine singulären Koordinaten vorkommen*, und wollen die stabilen Koordinaten mit x_i die instabilen mit y_μ bezeichnen.

Indem man die *Lagrange*schen Gleichungen nach den ω'' auflöst, erhält man

$$\omega_i'' = \gamma_i \omega_i + \Omega_i, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i} + \sum_{\mu=1}^{n} \beta_{i\mu}\left(\gamma_\mu \omega_\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_\mu}\right) + \Sigma\, b^i_{rs}\, \omega'_r \omega'_s.$$

Hierbei sind die b^i_{rs} und $\beta_{i\mu}$ für eine gewisse Umgebung von

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots \omega_n = 0$$

stetige Funktionen der ω mit stetigen Differentialquotienten erster Ordnung. Für $\omega_1 = \cdots = \omega_n = 0$ verschwinden alle β. Die Ω_i sind hiernach Funktionen von ω und ω', und zwar für die ω einer gewissen Umgebung von $\omega_1 = \cdots = \omega_n = 0$ und für alle ω'. Diese Funktionen sind in diesem Gebiet stetig und mit stetigen Differentialquotienten erster Ordnung nach den ω oder ω' versehen. Für $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = \omega'_1 = \omega'_2 = \cdots = \omega'_n = 0$ verschwinden die Ω_i nebst ihren Differentialquotienten erster Ordnung nach ω, ω'. Indem wir nun die stabilen und instabilen Koordinaten, wie oben erwähnt, mit den Buchstaben x und y bezeichnen und ferner ξ_i und η_μ für x'_i und y'_μ einführen, erhalten wir

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i, \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = -p_i^2 x_i + X_i,$$

$$\frac{dy_\mu}{dt} = \eta_\mu, \qquad \frac{d\eta_\mu}{dt} = q_\mu^2 y_\mu + Y_\mu,$$

$(i=1,2,\dots M; \qquad \mu=1,2,\dots N; \qquad M+N=n).$

Die X, Y sind für eine gewisse Umgebung von

$$x_1 = x_2 = \cdots x_M = y_1 = y_2 = \cdots = y_N = 0$$

und alle ξ, η stetige Funktionen der x, y, ξ, η mit stetigen Differentialquotienten erster Ordnung nach x, y, ξ, η. Für $x=y=\xi=\eta=0$ verschwinden die X, Y und ihre Differentialquotienten erster Ordnung nach x, y, ξ, η.

Es besteht das Integral der lebendigen Kraft

$$\sum_{i=1}^{M} \xi_i^2 + \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu^2 + \sum_{i=1}^{M} p_i^2 \cdot x_i^2 - \sum_{\mu=1}^{N} q_\mu^2 \cdot y_\mu^2 + R = \text{konst.}$$

Hierbei ist $R = \Sigma a_{\lambda\varrho}\, \omega'_\lambda\, \omega'_\varrho - \varphi$. Somit ist R für die x, y einer Umgebung von $x = y = 0$ und alle ξ, η eine stetige Funktion von x, y, ξ, η mit stetigen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung nach x, y, ξ, η. Für $x = y = \xi = \eta = 0$ verschwindet R nebst den genannten Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung.

Wir wählen nunmehr positive Zahlen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_n$ in der Weise, daß das Gebiet $(\mathfrak{T})$ $|\omega_1| < \mathfrak{a}_1, |\omega_2| < \mathfrak{a}_2, \ldots |\omega_n| < \mathfrak{a}_n$ sowie seine Umgrenzung innerhalb der im Vorhergehenden vorkommenden Umgebungen von

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = 0$$

liegen. *Im Verlauf der ganzen folgenden Untersuchung beschränken wir uns auf ω-Werte des Gebietes* $(\mathfrak{T})$. Weiter führen wir die Bezeichnungen

$$u_\mu = \eta_\mu + q_\mu\, y_\mu, \qquad v_\mu = \eta_\mu - q_\mu\, y_\mu$$

ein, woraus $u_\mu^2 + v_\mu^2 = 2[\eta_\mu^2 + q_\mu^2\, y_\mu^2]$ sich ergibt. Ferner bezeichnen wir den größten Wert unter den

$$\left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial X}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial X}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right|, \left|\frac{\partial Y}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial Y}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right|,$$

für eine Stelle $x_1, \ldots x_M, \xi_1, \ldots \xi_M, y_1, \ldots y_N, \eta_1, \ldots \eta_N$ mit $g(x, \xi, y, \eta)$. Dann haben wir

$$|X_i| \lessgtr g(\tau_i x, \tau_i \xi, \tau_i y, \tau_i \eta) \left[\sum_{i=1}^{M} |x_i| + \sum_{i=1}^{M} |\xi_i| + \sum_{\mu=1}^{N} |y_\mu| + \sum_{\mu=1}^{N} |\eta_\mu|\right],$$

$$|Y_\mu| \lessgtr g(\vartheta_\mu x, \vartheta_\mu \xi, \vartheta_\mu y, \vartheta_\mu \eta) \left[\sum_{i=1}^{M} |x_i| + \sum_{i=1}^{M} |\xi_i| + \sum_{\mu=1}^{N} |y_\mu| + \sum_{\mu=1}^{N} |y_\mu|\right],$$

$$0 < \tau_i < 1, \qquad 0 < \vartheta_\mu < 1.$$

Wir bilden noch

$$\frac{du_\mu^2}{dt} = 2 q_u\, u_\mu^2 + 2 u_\mu\, Y_\mu,$$

$$\frac{dv_\mu^2}{dt} = -2 q_\mu\, v_\mu^2 + 2 v_\mu\, Y_\mu,$$

$$\frac{d}{dt}(\xi_i^2 + p_i^2\, x_i^2) = 2 \xi_i\, X_i.$$

Nunmehr fassen wir zwei Bewegungen ins Auge. Die x, ξ, y, η-Koordinaten sollen dabei für gleiche t mit

$$x_i, \xi_i, y_\mu, \eta_\mu \quad \text{und} \quad x_i + x_i', \ \xi_i + \xi_i', \ y_\mu + y_\mu', \ \eta_\mu + \eta_\mu'$$

charakterisiert werden. Die Unterschiede der X, Y für die beiden eben dargestellten Stellen mögen mit X_i', Y_μ' bezeichnet werden. Dann ergibt sich

$$|X_i'| \gtrless g(x+\tau_i x', \xi+\tau_i \xi', y+\tau_i y', \eta+\tau_i \eta') \left[\sum_{i=1}^{M} |x_i'| + \sum_{i=1}^{M} |\xi_i'| + \sum_{\mu=1}^{N} |y_\mu'| + \sum_{\mu=1}^{N} |\eta_\mu'| \right],$$

$$|Y_\mu'| \gtrless g(x+\vartheta_\mu x', \xi+\vartheta_\mu \xi', y+\vartheta_\mu y', \eta+\vartheta_\mu \eta') \left[\sum_{i=1}^{M} |x_i'| + \sum_{i=1}^{M} |\xi_i'| + \sum_{\mu=1}^{N} |y_\mu'| + \sum_{\mu=1}^{N} |\eta_\mu'| \right],$$

$$\frac{dx_i'}{dt} = \xi_i', \qquad \frac{d\xi_i'}{dt} = -p_i^2 x_i' + X_i',$$

$$\frac{dy_\mu'}{dt} = \eta_\mu', \qquad \frac{d\eta_\mu'}{dt} = q_\mu^2 y_\mu' + Y_\mu'.$$

Es möge die Bezeichnung

$$u_\mu' = \eta_\mu' + q_\mu y_\mu', \qquad v_\mu' = \eta_\mu' - q_\mu y_\mu'$$

eingeführt werden, woraus sich ergibt

$$u_\mu'^2 + v_\mu'^2 = 2[\eta_\mu'^2 + q_\mu^2 y_\mu'^2].$$

Man erhält:

$$\frac{du_\mu'^2}{dt} = 2 q_\mu u_\mu'^2 + 2 u_\mu' Y_\mu',$$

$$\frac{dv_\mu'^2}{dt} = -2 q_\mu v_\mu'^2 + 2 v_\mu' Y_\mu',$$

$$\frac{d}{dt}(\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) = 2 \xi_i' X_i'.$$

§ 6. Fundamentale Hülfssätze und Folgerungen daraus.

I. Es seien $l_1, l_2, \ldots l_M$, $m_1, m_2, \ldots m_N$ irgend welche *positive* Zahlen. Ferner mögen $s_1, s_2, \ldots s_M, t_1, t_2, \ldots t_M, z_1, z_2, \ldots z_N$ reelle Variabeln bezeichnen. $\mathfrak{f}$ sei der kleinste der Werte l_i, $l_i \cdot p_i$, $m_\mu \cdot \frac{2q_\mu}{1+q_\mu}$ und $\mathfrak{g}$ der größte der Werte l_i, m_μ. Wir setzen

$$I' = \frac{\sqrt{2M+N}}{\mathfrak{f}} \qquad \Delta = \mathfrak{g} \cdot \sqrt{M+N}.$$

Dann gilt immer

$$\Gamma \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{M} l_i^2 (s_i^2 + p_i^2 t_i^2) + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2 z_\mu^2} \geqq \sum_{i=1}^{M} |s_i| + \sum_{i=1}^{M} |t_i| + \sum_{\mu=1}^{N} \frac{1+q_\mu}{2q_\mu} |z_\mu|,$$

$$\Delta \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{M} l_i^2 s_i^2 + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2 z_\mu^2} \geqq \sum_{i=1}^{M} l_i^2 |s_i| + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2 |z_\mu|.$$

Endlich soll q den kleinsten q_μ-Wert bezeichnen. Wir beweisen nun folgenden Satz:

Es seien $l_1, l_2, \ldots l_M, m_1, m_2, \ldots m_N, \sigma$ irgend welche positive Zahlen. Wir wählen eine solche Umgebung) Ω von $x=\xi=y=\eta=0$, daß darin die partiellen Ableitungen erster Ordnung der X_i, Y_μ nach den x, ξ, y, η dem absoluten Betrage nach kleiner sind als*

$$\frac{q}{\left(\Gamma + \frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)(\Delta + \sqrt{N})}, \qquad \frac{\sigma}{2\sqrt{N}\left(\Gamma + \frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)}.$$

Hierbei sind Γ, Δ den gegebenen l_i, m_μ so zugeordnet, wie es unmittelbar vorher erklärt wurde. Diese Umgebung Ω besitzt folgende Eigenschaften:

1. *Liegen bei zwei Bewegungen die x, ξ, y, η-Stellen für $t_0 \leqq t \leqq t_1$ $(t_1 > t_0)$ in Ω und ist für $t=t_0$*

$$r' = \sum_{i=1}^{M} l_i^2 (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2 v_\mu'^2 - \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 \leqq 0, \qquad \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 \neq 0,$$

wobei die Bedeutung von x', ξ', u', v' aus § 5 ersichtlich ist, so gilt $r' < 0$ für das Intervall $t_0 < t \leqq t_1$. Ferner ist für das Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 > (2q - \sigma) \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2$$

und wir haben

$$\sum_{\mu=1}^{N} u_{\mu 1}'^2 > e^{(2q-\sigma)(t_1 - t_0)} \sum_{\mu=1}^{N} u_{\mu 0}'^2,$$

wobei die Indizes 1 und 0 auf die Momente t_1 und t_0 hindeuten.

---

*) Wenn von einer Umgebung von $x=\xi=y=\eta=0$ gesprochen wird, so verstehen wir darunter, wofern nichts anderes gesagt wird, ein durch

$$|x_i| < a_i, \ |\xi_i| < \alpha_i, \ |y_\mu| < b_\mu, \ |\eta_\mu| < \beta_\mu$$

definiertes Gebiet, wobei jede den Bedingungen $|x_i| < a_i$, $|y_\mu| < b_\mu$ genügende x, y-Stelle dem Gebiet (𝔗) (s. S. 203) angehört.

2. *Liegen bei zwei Bewegungen die x, ξ, y, η-Stellen für $t_0 \geqq t \geqq t_1$ $(t_1 < t_0)$ in Ω und ist für $t = t_0$*

$$s' = \sum_{i=1}^{M} l_i^2 (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2 u_\mu'^2 - \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 \leqq 0, \qquad \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 \neq 0,$$

so gilt $s' < 0$ für das Intervall $t_0 > t \geqq t_1$. Ferner ist für das Intervall $t_0 \geqq t \geqq t_1$

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 < -(2q - \sigma) \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2$$

und wir haben

$$\sum_{\mu=1}^{N} v_{\mu 1}'^2 > e^{(2q-\sigma)(t_0 - t_1)} \sum_{\mu=1}^{N} v_{\mu 0}'^2,$$

wobei die Indizes 1 und 0 auf die Momente t_1 und t_0 hindeuten.

Beweis der ersten Eigenschaft von Ω. Wir wollen irgend einen t-Wert des Intervalls $t_0 \leqq t \leqq t_1$ ins Auge fassen, für den $r' \leqq 0$ und $\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 \neq 0$ ist, und für ihn $\frac{dr'}{dt}$ bilden. Man erhält

$$\frac{dr'}{dt} = \sum_{i=1}^{M} l_i^2 \cdot 2 \xi_i' X_i' + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2 (-2 q_\mu v_\mu'^2 + 2 v_\mu' Y_\mu') - \sum_{\mu=1}^{N} (2 q_\mu u_\mu'^2 + 2 u_\mu' Y_\mu') < -2q \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2$$

$$+ \frac{2q \left[\sum_{i=1}^{M} |\xi_i'| + \sum_{i=1}^{N} |x_i'| + \sum_{\mu=1}^{N} |\eta_\mu'| + \sum_{\mu=1}^{N} |y_\mu'| \right]}{\left(\Gamma + \frac{1+q}{2q} \sqrt{N} \right) (\Delta + \sqrt{N})} \left(\sum_{i=1}^{M} l_i^2 |\xi_i'| + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2 |v_\mu'| + \sum_{\mu=1}^{N} |u_\mu'| \right).$$

Aus

$$\eta_\mu' = \frac{u_\mu' + v_\mu'}{2}, \qquad q_\mu y_\mu' = \frac{u_\mu - v_\mu'}{2}$$

folgt

$$|\eta_\mu'| + |y_\mu'| \leqq \frac{1+q_\mu}{2q_\mu} (|u_\mu'| + |v_\mu'|),$$

$$\sum_{i=1}^{M} |\xi_i'| + \sum_{i=1}^{M} |x_i'| + \sum_{\mu=1}^{N} |\eta_\mu'| + \sum_{\mu=1}^{N} |y_\mu'| \leqq \sum_{i=1}^{M} (|\xi_i'| + |x_i'|) + \sum_{\mu=1}^{N} \frac{1+q_\mu}{2q_\mu} (|u_\mu'| + |v_\mu'|).$$

Mit Rücksicht auf das zu Anfang dieses Paragraphen Gesagte erkennt man, daß der rechts stehende Ausdruck

$$\leqq \Gamma \sqrt{\sum_{i=1}^{M} l_i^2 (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2 v_\mu'^2} + \frac{1+q}{2q} \sqrt{N} \sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2}.$$

Diese Summe ist aber, weil $r' \leqq 0$,

$$\leqq \left(\Gamma + \frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2}.$$

Die Einleitung dieses Paragraphen ergibt weiter

$$\sum_{i=1}^{M} l_i^2\,|\xi_i'| + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2\,|v_\mu'| \leqq \Delta\sqrt{\sum_{i=1}^{M} l_i^2\,\xi_i'^2 + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2\,v_\mu'^2}.$$

Berücksichtigt man $r' \leqq 0$, so sieht man, daß die rechte Seite gleich oder kleiner ist als $\Delta\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2}$ und daher

$$\sum_{i=1}^{M} l_i^2\,|\xi_i'| + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2\,|v_\mu'| + \sum_{\mu=1}^{N} |u_\mu'| \leqq (\Delta + \sqrt{N})\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2}.$$

Somit haben wir

$$\frac{dr'}{dt} < -2q\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 + \frac{2q\left(\Gamma + \frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2}}{\left(\Gamma + \frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)(\Delta + \sqrt{N})}(\Delta + \sqrt{N})\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2}.$$

Also ist für den ins Auge gefaßten t-Wert $\frac{dr'}{dt} < 0$.

Aus diesen Betrachtungen folgt zunächst, daß für $t = t_0$ außer $r' \leqq 0$ $\frac{dr'}{dt} < 0$ gilt. Für t-Werte des Intervalls $t_0 < t \leqq t_1$, welche sich genügend wenig von t_0 unterscheiden, hat daher r' einen *negativen* Wert. Wir behaupten, daß in dem Intervall $t_0 < t \leqq t_1$ immer $r' < 0$ gilt. Zum Beweise nehmen wir versuchsweise an, diese Behauptung sei in einem Fall nicht zutreffend. Dann gibt es einen solchen t-Wert T des Intervalls $t_0 < t \leqq t_1$, daß für $t = T$ $r' = 0$ wird, während für $t_0 < t < T$ $r' < 0$ gilt. Dann muß ein t-Wert τ existieren, welcher der Bedingung $t_0 < \tau < T$ genügt und für den $\frac{dr'}{dt} \geqq 0$ ist. Für diesen Wert τ ist $r' < 0$ und daher $\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 > 0$. Somit gilt für den Wert τ nach dem Bewiesenen $\frac{dr'}{dt} < 0$. Wir sind also zu einem Widerspruch gelangt und müssen unsere versuchsweise gemachte Annahme fallen lassen. Somit ist unsere Behauptung richtig.

Aus dem Umstande, daß für $t_0 < t \leqq t_1$ $r' < 0$ gilt, folgt

$$\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 > 0 \text{ für } t_0 < t \leqq t_1.$$

Es gilt daher für das ganze Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ $\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 > 0$. Nunmehr bilden wir

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 = 2\sum_{\mu=1}^{N} q_\mu u_\mu'^2 + 2\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu' Y_\mu'$$

$$> 2q\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 - \frac{2\sigma\left(\sum_{i=1}^{M}[|\xi_i'|+|x_i'|]+\sum_{\mu=1}^{N}\frac{1+q_\mu}{2q_\mu}(|u_\mu'|+|v_\mu'|)\right)}{2\sqrt{N}\left(\Gamma+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)}\sqrt{N}\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2}$$

$$\geqq 2q\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 - \frac{2\sigma\left(\Gamma+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2}}{2\sqrt{N}\left(\Gamma+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)}\cdot\sqrt{N}\cdot\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2}.$$

Somit ist in der Tat

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 > (2q-\sigma)\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt

$$e^{-(2q-\sigma)t}\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 - e^{-(2q-\sigma)t}\cdot(2q-\sigma)\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 = \frac{d}{dt}\left[e^{-(2q-\sigma)t}\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2\right] > 0.$$

Also ist

$$e^{-(2q-\sigma)t_1}\sum_{\mu=1}^{N} u_{\mu 1}'^2 > e^{-(2q-\sigma)t_0}\sum_{\mu=1}^{N} u_{\mu 0}'^2$$

und

$$\sum_{\mu=1}^{N} u_{\mu 1}'^2 > e^{(2q-\sigma)(t_1-t_0)}\sum_{\mu=1}^{N} u_{\mu 0}'^2.$$

Damit ist die erste Eigenschaft von Ω bewiesen. Der Beweis der anderen Eigenschaft ist dem eben dargestellten völlig analog und kann daher hier übergangen werden.

Auf Grund des Vorhergehenden erkennen wir sofort folgende weiteren Eigenschaften von Ω:

3. *Liegt bei einer Bewegung* x, ξ, y, η *für* $t_0 \leqq t \leqq t_1$ $(t_1 > t_0)$ *in* Ω *und ist für* $t = t_0$

$$r = \sum_{i=1}^{M} l_i^2(\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2) + \sum_{\mu=1}^{N} m_\mu^2 v_\mu^2 - \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2 \leqq 0, \qquad \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2 \neq 0,$$

so gilt $r<0$ *für das ganze Intervall* $t_0<t\overline{\leqq}t_1$. *Ferner ist für das Intervall* $t_0\overline{\leqq}t\leqq t_1$

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu^2>(2q-\sigma)\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu^2$$

und wir haben

$$\sum_{\mu=1}^{N}u_{\mu 1}^2>e^{(2q-\sigma)(t_1-t_0)}\sum_{\mu=1}^{N}u_{\mu 0}^2,$$

wobei die Indizes 0 und 1 auf die Momente t_0 *und* t_1 *hindeuten.*

4. *Liegt bei einer Bewegung* x, ξ, y, η *für* $t_0\overline{\geqq}t\overline{\geqq}t_1$ $(t_1<t_0)$ *in* Ω *und ist für* $t=t_0$

$$s=\sum_{i=1}^{M}l_i^2(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N}m_\mu^2u_\mu^2-\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu^2\overline{\leqq}0,\qquad \sum_{\mu=1}^{N}v_\mu^2\neq 0,$$

so gilt $s<0$ *für das ganze Intervall* $t_0>t\overline{\geqq}t_1$. *Ferner ist für das Intervall* $t_0\overline{\geqq}t\overline{\leqq}t_1$

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu^2<-(2q-\sigma)\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu^2$$

und wir haben

$$\sum_{\mu=1}^{N}v_{\mu 1}^2>e^{(2q-\sigma)(t_0-t_1)}\sum_{\mu=1}^{N}v_{\mu 0}^2,$$

wobei die Indizes 0 und 1 auf die Momente t_0 *und* t_1 *hindeuten.*

In der Tat werden diese Eigenschaften aus den oben angeführten erhalten, wenn man als zweite Bewegung diejenige hinzunimmt, bei welcher $x=\xi=y=\eta=0$ für alle t gilt.

Wir wollen nun annehmen, es seien positive Zahlen

$$l_1, l_2, \ldots l_M,\ m_1=m_2=\cdots=m_N=m<1, \sigma$$

gewählt und eine Umgebung Ω_0 nach Anleitung von S. 205 diesen Zahlen zugeordnet. Es gilt dann folgender Satz:

Es mögen zwei Bewegungen für $t_0-\tau\overline{\leqq}t\overline{\leqq}t_0+\tau$ $(\tau>0)$ *im Gebiet* Ω *liegen. K bezeichne den größten der Werte* $\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2$ *für* $t=t_0+\tau$ *und* $\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2$ *für* $t=t_0-\tau$. *Dann sind* $\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2$ *und* $\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2$ *für* $t=t_0$

$$\overline{\leqq}\frac{2}{1-m^2}\sum_{i=1}^{M}l_i^2(\xi_i'^2+p_i^2x_i'^2)+Ke^{-(2q-\sigma)\tau}.$$

Die hierbei gebrauchten Bezeichungen werden nach dem Vorhergehenden ohne weiteres verständlich sein.

Beweis. Wir haben für $t=t_0$ entweder

$$(1.) \qquad \sum_{i=1}^{M} l_i^2 (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + m^2 \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 \geqq \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2$$

oder

$$\sum_{i=1}^{M} l_i^2 (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + m^2 \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 < \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2.$$

Im *zweiten* Falle ist nach S. 205

$$(2.) \qquad \sum_{t_0} u_\mu'^2 < e^{-(2q-\sigma)\tau} \sum_{t_0+\tau} u_\mu'^2,$$

wobei unterhalb Σ auf die Zeiten hingewiesen ist, für welche die entsprechenden Größen zu bilden sind.

Für $t=t_0$ gilt ferner entweder

$$(3.) \qquad \sum_{i=1}^{M} l_i^2 (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + m^2 \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 \geqq \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2$$

oder

$$\sum_{i=1}^{M} l_i^2 (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + m^2 \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 < \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2.$$

Im *letzten* Fall ist nach S. 206

$$(4.) \qquad \sum_{t_0} v_\mu'^2 < e^{-(2q-\sigma)\tau} \sum_{t_0-\tau} v_\mu'^2.$$

Betrachtet man nun einzeln die möglichen Kombinationen (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), so erkennt man die Richtigkeit unserer Behauptung.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt unmittelbar:

Liegt eine Bewegung für $t_0-\tau \leqq t \leqq t_0+\tau$ $(\tau>0)$ *in* Ω_0 *und bezeichnet* G *den größten der Werte* $\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2$ *für* $t=t_0+\tau$ *und* $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2$ *für* $t=t_0-\tau$, *so sind* $\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2$ *und* $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2$ *für* $t=t_0$

$$\leqq \frac{2}{1-m^2} \sum_{i=1}^{M} l_i^2 (\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2) + G \cdot e^{-(2q-\sigma)\tau}.$$

In der Tat, es genügt zum Beweise, die durch $x=\xi=y=\eta=0$ für alle t dargestellte Bewegung hinzuzuziehen.

Wir wollen nun noch einige Bezeichnungen erklären. Es sei

$$l_1=l_2=\cdots=l_M=l>0, \quad m_1=m_2=\cdots=m_N=m>0.$$

Dann wollen wir die den l_i, m_μ zugeordneten $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ (vergl. den Anfang dieses Paragraphen) mit $\mathfrak{f}(l,m)$ und $\mathfrak{g}(l,m)$ bezeichnen. Sind für eine Umgebung von $x=\xi=y=\eta=0$ die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung der X_i, Y_μ nach x, ξ, y, η absolut kleiner als

$$\frac{q}{\left(\frac{\sqrt{2M+N}}{\mathfrak{f}(l,m)}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)\left(\mathfrak{g}(l,m)\sqrt{M+N}+\sqrt{N}\right)},$$

so entspricht diese Umgebung den Größen

$$l_1=l_2=\cdots=l_M=l, \quad m_1=m_2=\cdots=m_N=m,$$

$$\sigma=\frac{2q\sqrt{N}}{\mathfrak{g}(l,m)\sqrt{M+N}+\sqrt{N}}$$

im Sinne des zu Anfang dieses Paragraphen bewiesenen Satzes. Wir wollen setzen

$$\sigma(l,m)=\frac{2q\sqrt{N}}{\mathfrak{g}(l,m)\sqrt{M+N}+\sqrt{N}}.$$

Offenbar ist $0<\sigma(l,m)<2q$.

II. Es seien l, m, h positive Zahlen. Wir wollen annehmen, in einer Umgebung C der Stelle $x=\xi=y=\eta=0$ seien die partiellen Ableitungen der X, Y nach den x, ξ, y, η absolut kleiner als

$$k=\frac{\tau\cdot\varepsilon}{\lambda\cdot 2(M+N)}.$$

Hierbei bedeuten: λ die größte der Zahlen $l, m, 1$; τ die kleinste der Zahlen $lp, l, m, \frac{2q}{1+q}, \frac{2qm}{1+q}$; ε die kleinste der Zahlen $h, \frac{q}{2}$.

Wir wollen annehmen, daß zwei Bewegungen für $t>t_0$ in C bleiben, und ähnliche Bezeichnungen wie vorhin anwenden. Wir bilden

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2ht}\left[l^2\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2+p_i^2\,x_i'^2)+m^2\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2-\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2\right]\right)$$

$$=2he^{2ht}\left[l^2\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2+p_i^2\,x_i'^2)+m^2\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2-\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2\right]$$

$$+e^{2ht}\left[l^2\sum_{i=1}^{M}2\xi'\,X_i'+m^2\sum_{\mu=1}^{N}(2q_\mu\,u_\mu'^2+2u_\mu'\,Y_\mu')-\sum_{\mu=1}^{N}(-2q_\mu\,v_\mu'^2+2v_\mu'\,Y_\mu')\right]\gtrless$$

$$\geqq 2e^{2ht}\{hl^2\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2+p_i^2x_i'^2)+m^2(h+q)\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2+(q-h)\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2$$

$$-[l^2\sum_{i=1}^{M}|\xi_i'|\cdot|X_i'|+m^2\sum_{\mu=1}^{N}|u_\mu'||Y_\mu'|+\sum_{\mu=1}^{N}|v_\mu'||Y_\mu'|]\},$$

$$|X_i'|,\ |Y_\mu'|\leqq k\Big(\sum_{i=1}^{M}(|x_i'|+|\xi_i'|)+\sum_{\mu=1}^{N}(|y_\mu'|+|\eta_\mu'|)\Big)$$

$$\leqq k\Big(\sum_{i=1}^{M}(|x_i'|+|\xi_i'|)+\sum_{\mu=1}^{N}(|u_\mu'|+|v_\mu'|)\cdot\frac{1+q}{2q}\Big)$$

$$\leqq k\cdot\frac{1}{\tau}\Big(\sum_{i=1}^{M}(lp_i|x_i'|+l|\xi_i'|)+\sum_{\mu=1}^{N}(m|u_\mu'|+|v_\mu'|)\Big)$$

$$\leqq \frac{k}{\tau}\sqrt{2M+2N}\sqrt{l^2\sum_{i=1}^{M}(p_i^2x_i'^2+\xi_i'^2)+m^2\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2+\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2}.$$

Ferner haben wir

$$l^2\sum_{i=1}^{M}|\xi_i'|+m^2\sum_{\mu=1}^{N}|u_\mu'|+\sum_{\mu=1}^{N}|v_\mu'|\leqq\lambda[l\sum_{i=1}^{M}|\xi_i'|+m\sum_{\mu=1}^{N}|u_\mu'|+\sum_{\mu=1}^{N}|v_\mu'|]$$

$$\leqq\lambda\sqrt{M+2N}\sqrt{l^2\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2+p_i^2x_i'^2)+m^2\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2+\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2}.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(e^{2ht}[l^2\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2+p_i^2x_i'^2)+m^2\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2-\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2])$$

$$\geqq 2e^{2ht}\{[h-\frac{k\lambda}{\tau}\sqrt{2M+2N}\cdot\sqrt{M+2N}](l^2\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2+p_i^2x_i'^2)+m^2\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2)$$

$$+[q-h-\frac{k\cdot\lambda}{\tau}\sqrt{2M+2N}\cdot\sqrt{M+2N}]\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2\}$$

$$=2e^{2ht}\{[h-\frac{k\cdot\lambda}{\tau}\sqrt{2M+2N}\cdot\sqrt{M+2N}][l^2\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2+p_i^2x_i'^2)+m^2\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2-\sum_{\mu=1}^{M}v_\mu'^2]$$

$$+[q-\frac{2k\lambda}{\tau}\sqrt{2M+2N}\sqrt{M+2N}]\cdot\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2\}.$$

Wir setzen nun

$$[l^2\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2+p_i^2x_i'^2)+m^2\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2-\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2]\cdot e^{2ht}=\omega.$$

Ferner bemerken wir, daß

$$\vartheta=q-\frac{2k\lambda}{\tau}\sqrt{2M+2N}\sqrt{M+2N}=q-2\varepsilon\cdot\frac{\sqrt{M+2N}}{\sqrt{2M+2N}}>q-2\varepsilon\geqq 0.$$

Also ist

$$[q-\frac{2k\lambda}{\tau}\sqrt{2M+2N}\sqrt{M+2N}]\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2\geqq 0.$$

Weiter haben wir

$$h-\frac{k\lambda}{\tau}\sqrt{2M+2N}\sqrt{M+2N}=h-\varepsilon\frac{\sqrt{M+2N}}{\sqrt{2M+2N}}>h-\varepsilon\geqq h-h=0.$$

Es ist daher

$$\varrho=h-\frac{k\lambda}{\tau}\sqrt{2M+2N}\sqrt{M+2N}>0.$$

Somit gilt

$$\frac{d\omega}{dt}\geqq 2\varrho\omega+2\vartheta e^{2ht}\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2.$$

Also haben wir stets

(1.) $$\frac{d\omega}{dt}\geqq 2\varrho\omega$$

und, wenn $\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2\neq 0$,

(2.) $$\frac{d\omega}{dt}>2\varrho\omega.$$

Aus (1.) folgt

$$\frac{d}{dt}(e^{-2\varrho t}\cdot\omega)\geqq 0.$$

Wenn nun t_1 und $t_2>t_1$ zwei Zeitmomente bezeichnen und ω_1 und ω_2 die entsprechenden ω-Werte sind, so haben wir

(3.) $$\omega_2\geqq e^{2\varrho(t_2-t_1)}\,\omega_1.$$

Hieraus folgt offenbar, daß, wenn ω für $t>t_0$ einmal >0 ist, dann ω für $t\to\infty$ nach ∞ konvergiert. Ist andererseits ω einmal $=0$, ohne daß beide Bewegungen stets zusammenfallen, so muß für den betrachteten Moment $\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2\neq 0$ sein. Für den genannten Moment haben wir also nach (2.)

$$\frac{d\omega}{dt}>2\varrho\omega=0.$$

Somit wächst ω in diesem Moment mit wachsendem t und nimmt daher auch positive Werte an. Aus dem Vorhergehenden folgt somit, daß

auch in diesem Falle ω für $t \to \infty$ nach ∞ konvergiert. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Weiß man, daß

$$\omega = e^{2ht}\left[l^2 \sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + m^2 \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 - \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2\right]$$

für $t \to \infty$ nicht nach ∞ konvergiert, so muß für $t > t_0$ stets $\omega < 0$ gelten, falls nicht etwa beide Bewegungen immer zusammenfallen. In letzterem Falle gilt natürlich immer $\omega = 0$.

§ 7. Ein Hülfssatz, bei dessen Beweis das Integral der lebendigen Kraft benutzt wird.

Es möge R dieselbe Bedeutung haben wie S. 203. Wir bestimmen eine derartige Umgebung von $x = \xi = y = \eta = 0$, daß darin

$$|R| \leqq \left[\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2) + \sum_{\mu=1}^{N}(\eta_\mu^2 + q_\mu^2 y_\mu^2)\right] \cdot \frac{5}{22 + 36M},$$

wobei das Zeichen $=$ nur für $x = \xi = y = \eta = 0$ gilt. Eine solche Umgebung existiert nach den über R S. 203 gemachten Angaben. Wir wollen sie mit (E) bezeichnen und können sie als nur von den Anfangsdaten abhängig ansehen. Es seien nun γ und δ irgend welche positive Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen: Die Gebiete

$$(F_1) \qquad -\delta \leqq \xi_i \leqq \delta, \qquad -\delta \leqq p_i x_i \leqq \delta,$$
$$(G) \qquad -\gamma \leqq \eta_\mu \leqq \gamma, \qquad -\gamma \leqq q_\mu y_\mu \leqq \gamma$$

mögen zusammen ein Gebiet (F_1, G) bilden, welches in (E) liegt; außerdem sei $\gamma \leqq \frac{1}{2\sqrt{N}}\delta$.

Wir führen noch das Gebiet

$$(F_2) \qquad -\frac{\delta}{3\sqrt{M}} \leqq \xi \leqq \frac{\delta}{3\sqrt{M}}, \qquad -\frac{\delta}{3\sqrt{M}} \leqq p_i x_i \leqq \frac{\delta}{3\sqrt{M}}$$

ein. Es gilt dann folgender Satz:

Liegt x, ξ, y, η für $t = t_1$ im Gebiet (F_1, G), für $t = t_2$ im Gebiet (F_2, G) und bezeichnen $\bar{x}_i, \bar{\xi}_i, \bar{y}_\mu, \bar{\eta}_\mu$ und $\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{\xi}}_i, \bar{\bar{y}}_\mu, \bar{\bar{\eta}}_\mu$ die Koordinaten der Stelle für $t = t_1$ und $t = t_2$, so gilt

$$\sum_{i=1}^{M}(\bar{\xi}_i^2 + p_i^2 \bar{x}_i^2) > \delta^2.$$

Es liegt daher die Partialstelle (x, ξ) *für* $t = t_1$ *nicht auf dem Rande von* (F_1).

Beweis. Das Integral der lebendigen Kraft gibt

$$\sum_{i=1}^{M}(\bar{\xi}_i^2 + p_i^2\,\bar{x}_i^2) = \sum_{i=1}^{M}(\bar{\bar{\xi}}_i^2 + p_i^2\,\bar{\bar{x}}_i^2) + \sum_{\mu=1}^{N}(\bar{\eta}_\mu^2 - q_\mu^2\,\bar{y}_\mu^2) + \bar{R} - \sum_{\mu=1}^{N}(\bar{\bar{\eta}}_\mu^2 - q_\mu^2\,\bar{\bar{y}}_\mu^2) - \bar{\bar{R}}.$$

$\bar{R}$ und $\bar{\bar{R}}$ beziehen sich dabei auf t_1 und t_2. Die rechte Seite dieser Gleichung ist

$$< \frac{2}{9}\delta^2 + \frac{\delta^2}{4} + \frac{5}{22+36M}\left(\frac{2}{9}\delta^2 + \frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{\delta^2}{4} + \frac{5}{22+36M}\left(2M\delta^2 + \frac{\delta^2}{2}\right),$$

d. h. $< \delta^2$. Unser Satz ist damit bewiesen.

§ 8. Einführung einiger im Folgenden vorkommenden Gebiete.

Wir wollen eine Umgebung (H) von $x = \xi = y = \eta = 0$ einführen, welche folgende Eigenschaften hat: Erstens sollen alle Stellen von (H) im Gebiete (E) (vergl. § 7) liegen. Zweitens sollen für die Stellen von (H) die partiellen Ableitungen erster Ordnung der X_i, Y_μ nach den x, ξ, y, η dem absoluten Betrage nach kleiner sein als

$$\frac{q}{[\sqrt{2M+N}\left(\frac{p+1}{p} + \frac{1}{2q}\right) + \frac{1+q}{2q}\sqrt{N}]\cdot[\sqrt{M+N}+\sqrt{N}]}.$$

Hierbei ist p der kleinste p_μ-Wert.

Es möge nun d irgend eine solche positive Zahl bezeichnen, daß das Gebiet

$$-d \leqq \xi_i \leqq d, \quad -d \leqq p_i x_i \leqq d, \quad -\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq \eta_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}, \quad -\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq q_\mu y_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

innerhalb (H) liegt. Wir führen nun ein: Erstens zwei Gebiete für die Variabeln x, ξ

$$(A) \qquad -d \leqq \xi_i \leqq d, \qquad -d \leqq p_i x_i \leqq d$$

und

$$(\alpha) \qquad -\frac{d}{3\sqrt{M}} \leqq \xi_i \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}}, \qquad -\frac{d}{3\sqrt{M}} \leqq p_i x_i \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}},$$

zweitens ein Gebiet für die Variabeln u, v

$$(B) \qquad -\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq u_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}, \qquad -\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq v_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}},$$

drittens ein Gebiet für die Variabeln y, η

$$(Z) \qquad -\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq \eta_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}, \qquad -\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq q_\mu y_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}.$$

Um das Gebiet der Variabeln x, ξ, u, v anzudeuten, das durch die vereinigten Ungleichungen (A) und (B) definiert ist, gebrauchen wir das Zeichen (A, B). Die analogen Zeichen werden ohne weiteres verständlich sein.

Liegt x, ξ, y, η für $t=t_2$ in (α, Z), für $t=t_1$ in (A, Z), und ist für $t=t_1$ $u_\varrho = \pm \frac{d}{2\sqrt{N}}$ (ϱ eine gewisse der Zahlen 1, 2, ... N), so folgt für $t=t_1$ $\frac{du_\varrho^2}{dt} > 0$.

Beweis. Bezeichnen wir die Koordinaten von x, ξ, y, η für $t=t_1$ mit $\overline{x}_i, \overline{\xi}_i, \overline{y}_\mu, \overline{\eta}_\mu$, so folgt aus dem Satze des vorhergehenden Paragraphen

$$\sum_{i=1}^{M} (\overline{\xi}_i^2 + p_i^2 \overline{x}_i^2) < d^2.$$

Ferner haben wir für $t=t_1$

$$\frac{d}{dt} u_\varrho^2 = 2 q_\varrho \overline{u}_\varrho^2 + 2 \overline{u}_\varrho \overline{Y}_\varrho,$$

wobei $\overline{Y}_\varrho$ das für $\overline{x}_i, \overline{\xi}_i, \overline{y}_\mu, \overline{\eta}_\mu$ gebildete Y_ϱ bedeutet. Also ist

$$\frac{d}{dt} u_\varrho^2 > 2q \frac{d^2}{4N} - 2 \frac{d}{2\sqrt{N}} \cdot \frac{q \cdot \left[\sqrt{2M} \cdot d \cdot \frac{1+p}{p} + \frac{N \cdot d}{2\sqrt{N}} \cdot \frac{1+q}{q}\right]}{[\sqrt{2M+N}\left(\frac{p+1}{p} + \frac{1}{2q}\right) + \frac{1+q}{2q}\sqrt{N}]\,[\sqrt{M+N}+\sqrt{N}]}$$

und somit $\frac{d}{dt} u_\varrho^2 > 0$; q. e. d.

Analog beweist man folgenden Satz:

Liegt x, ξ, y, η für $t=t_2$ in (α, Z), für $t=t_1$ in (A, Z), und ist für $t=t_1$ $v_\varrho = \pm \frac{d}{2\sqrt{N}}$ (ϱ eine gewisse der Zahlen 1, 2, ... N), so folgt für $t=t_1$ $\frac{dv_\varrho^2}{dt} < 0$.

§ 9. Nachweis der Existenz von Lösungen, die für genügend große t im Gebiete (A, B) bleiben, und von Lösungen, die für genügend kleine t im Gebiete (A, B) bleiben.

Da im Folgenden die Gebiete (α, B) und (A, B) oft vorkommen, wollen wir auf ihre Definition nochmals hinweisen. Wir hatten

$$(A,B)\quad \begin{cases} -d \leqq \xi_i \leqq d, & -d \leqq p_i x_i \leqq d, \\ -\dfrac{d}{2\sqrt{N}} \leqq u_\mu \leqq \dfrac{d}{2\sqrt{N}}, & -\dfrac{d}{2\sqrt{N}} \leqq v_\mu \leqq \dfrac{d}{2\sqrt{N}} \end{cases}$$

$$(\alpha,B)\quad \begin{cases} -\dfrac{d}{3\sqrt{M}} \leqq \xi_i \leqq \dfrac{d}{3\sqrt{M}}, & -\dfrac{d}{3\sqrt{M}} \leqq p_i x_i \leqq \dfrac{d}{3\sqrt{M}}, \\ -\dfrac{d}{2\sqrt{N}} \leqq u_\mu \leqq \dfrac{d}{2\sqrt{N}}, & -\dfrac{d}{2\sqrt{N}} \leqq v_\mu \leqq \dfrac{d}{2\sqrt{N}}. \end{cases}$$

Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

Jede x, ξ, v-Stelle des Gebietes

$$(\Pi)\quad -\frac{d}{3\sqrt{M}} \leqq \xi_i \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}}, \quad -\frac{d}{3\sqrt{M}} \leqq p_i x_i \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}}, \quad -\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq v_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

kann man durch eine u-Stelle des Gebietes

$$-\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq u_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

zu einer x, ξ, u, v-Stelle ergänzen, welche als Anfangsstelle genommen eine für wachsende t im Gebiete (A, B) bleibende Lösung gibt.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß aus dem Erfülltsein der Bedingungen

$$-\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq u_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}, \quad -\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq v_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

die Beziehungen

$$-\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq \frac{u_\mu + v_\mu}{2} \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}, \quad -\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq \frac{u_\mu - v_\mu}{2} \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

folgen. Im Anschluß daran erinnern wir uns, daß für jede Bewegung

$$\eta_\mu = \frac{u_\mu + v_\mu}{2}, \quad q_\mu \cdot y_\mu = \frac{u_\mu - v_\mu}{2}$$

gilt.

Es sei nun $[x, \xi, v]_0$ eine fest gewählte Stelle des Gebietes (*II*). Ferner sei t_0 irgend ein t-Wert. Wir wollen versuchsweise annehmen, daß unsere Behauptung sich für die gewählte Stelle $[x, \xi, v]_0$ nicht bewahrheite. Wie man dann auch die Stelle $[x, \xi, v]_0$ durch eine u-Stelle $[u]_0$ des Gebietes $-\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq u_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$ zu einer x, ξ, v, u-Stelle ergänzen möge, stets liefert diese x, ξ, v, u-Stelle als Anfangsstelle für $t = t_0$ genommen eine Lösung, in betreff welcher folgende Aussage gilt: Es existiert eine und nur eine Zahl $\tau > t_0$ von der Beschaffenheit, daß für $t_0 \leqq t \leqq \tau$ die Bewegung im Gebiet (A, B) liegt, während dies *nicht* immer der Fall ist für das Intervall $t_0 \leqq t \leqq \tau + h$ $(h > 0)$, wie auch die positive Zahl h gewählt sein möge. Wir wollen nun die Werte $u_1, u_2, \ldots u_N$ für $t = \tau$ ins Auge fassen. Diese Werte bilden eine u-Stelle $[u]$, von der wir sagen wollen, sie sei der Stelle $[u]_0$ zugeordnet. *Die Stelle* $[u]$ *liegt, wie wir nunmehr beweisen wollen, auf dem Rande des Gebietes* $-\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq u_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$ $(\mu = 1, 2, \ldots N)$.

Die Werte von x, ξ, u, v für $t = \tau$ bilden nämlich eine Stelle, welche offenbar auf der Begrenzung von (A, B) liegt. Da nun aber die Bewegung für $t = t_0$ in (α, Z), für $t = \tau$ in (A, Z) liegt (vergl. die Bemerkung zu Anfang unseres Beweises), so ist nach § 7 $\sum_{i=1}^{M} (\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2) < d^2$ für $t = \tau$ und mithin $|\xi_i| < d$, $p_i |x_i| < d$. Damit also die eben besprochene Stelle auf dem Rande von (A, B) liege, ist notwendig, daß die von den Werten u, v für $t = \tau$ gebildete u, v-Stelle auf der Begrenzung von (B) liege. Die beiden Sätze am Schluß des § 8 ergeben nun folgendes: Ist für $t = \tau$ ein u-Wert, etwa $u_\varrho = \pm \frac{d}{2\sqrt{N}}$, so gilt für $t = \tau$ $\frac{du_\varrho^2}{dt} > 0$. Ist für $t = \tau$ ein v-Wert, etwa $v_\sigma = \pm \frac{d}{2\sqrt{N}}$, so gilt für $t = \tau$ $\frac{dv_\sigma^2}{dt} < 0$. Hieraus schließt man, daß, wenn die Stelle $[u]$ nicht auf dem Rande von $-\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq u_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$ liegt, die Bewegung über den Moment τ hinaus im Gebiet (A, B) verbleibt. Da dies dem Vorhergehenden widerspricht, so schließen wir, daß die Stelle $[u]$ in der Tat auf dem Rande von $-\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq u_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$ liegt.

Somit ist jeder u-Stelle des Gebietes $|u_\mu| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$ eine u-Stelle auf der Begrenzung dieses Gebietes zugeordnet. *Wir wollen nunmehr weiter zeigen, daß diese Zuordnung eine stetige ist.*

Zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, daß nach § 8 für $t = \tau$

und einen gewissen Index ϱ außer $u_\varrho = \pm \frac{d}{2\sqrt{N}}$ auch $\frac{du_\varrho^2}{dt} > 0$ gilt. Sodann unterscheiden wir zwei Fälle, jenachdem die Stelle $[u]_0$ *im Innern* des Gebietes $|u_\mu| \overline{\overline{<}} \frac{d}{2\sqrt{N}}$ oder auf dessen *Begrenzung* liegt. Es möge zunächst angenommen werden, daß $[u]_0$ *im Innern* dieses Gebietes gelegen ist. Dann ist offenbar $\tau > t_0$. Wir wählen nun eine Größe $h > 0$, welche der Bedingung entspricht, daß die der Anfangsstelle $[x, \xi, v]_0, [u]_0$ für $t = t_0$ entsprechende Bewegung für $t_0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} \tau + h$ in (H) (vergl. § 8) bleibt, daß die von den u-Koordinaten dieser Bewegung für $t = \tau + h$ gebildete u-Stelle *außerhalb* des Gebietes $|u_\mu| \overline{\overline{<}} \frac{d}{2\sqrt{N}}$ liegt und daß $t_0 < \tau - h$ ist. Im übrigen ist die Wahl von h willkürlich und es kann h beliebig klein gewählt werden (man vergleiche die Bemerkung, mit der wir unsere Beweisführung begannen). Für den Zeitraum $t_0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} \tau - h$ kann kein u jemals gleich $\pm \frac{d}{2\sqrt{N}}$ werden. Wäre nämlich einmal etwa $|u_\varrho| = \frac{d}{2\sqrt{N}}$, so folgt nach dem Vorhergehenden $\frac{du_\varrho^2}{dt} > 0$, sodaß die Bewegung für das Intervall $t_0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} \tau$ nicht immer im Gebiet (A, B) bleiben könnte. Hieraus schließen wir weiter, daß die u sich im Intervall $t_0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} \tau - h$ von $+\frac{d}{2\sqrt{N}}$ und $-\frac{d}{2\sqrt{N}}$ um mehr als eine angebbare positive Zahl unterscheiden. Man kann daher eine *im Innern* des Gebietes $|u_\mu| \overline{\overline{<}} \frac{d}{2\sqrt{N}}$ gelegene Umgebung (ω) von $[u]_0$ angeben, welche folgende Bedingung erfüllt: Die Bewegungen, welche $[x, \xi, v]_0$ und einer u-Stelle dieser Umgebung als Anfangsstelle für $t = t_0$ entsprechen, verlaufen während des Intervalls $t_0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} \tau + h$ in (H); ihre u-Koordinaten bilden für $t = \tau + h$ u-Stellen *außerhalb* des Gebietes $|u_\mu| \overline{\overline{<}} \frac{d}{2\sqrt{N}}$ und für $t_0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} \tau - h$ u-Stellen *im Innern* des eben genannten Gebietes. Jeder Stelle von (ω) kann man dann eine Größe ϑ ebenso zuordnen, wie τ zu der Stelle $[u]_0$. Die so erhaltenen Größen ϑ müssen aber größer sein, als $\tau - h$, da von t_0 bis $\tau - h$ incl. die von den u-Koordinaten gebildete Stelle niemals auf der Grenze von $|u_\mu| \overline{\overline{<}} \frac{d}{2\sqrt{N}}$ liegt, was für $t = \vartheta$ der Fall sein muß. Andererseits müssen die ϑ kleiner sein als $\tau + h$, da für $t = \tau + h$ die von den u-Koordinaten gebildeten Stellen außerhalb des Gebietes $|u_\mu| \overline{\overline{<}} \frac{d}{2\sqrt{N}}$ liegen. Es unterscheiden sich daher die ϑ von τ um weniger als h. Die u-Stellen, welche den u-Stellen der Umgebung (ω) zugeordnet sind, werden gebildet

von den u-Koordinaten der entsprechenden Bewegungen für $t=\vartheta$. Indem man h genügend klein wählt und die Umgebung (ω) genügend verkleinert, kann man offenbar erreichen, 1. daß die u-Koordinaten der $[x, \xi, v]_0, [u]_0$ entsprechenden Bewegung für $\tau-h \leqq t \leqq \tau+h$ sich beliebig wenig von den u-Koordinaten dieser Bewegung für $t=\tau$ unterscheiden, 2. daß die u-Koordinaten einer Bewegung, welche $[x, \xi, v]_0$ und einer u-Stelle der gewählten Umgebung von $[u]_0$ entspricht, in dem Intervall $\tau-h \leqq t \leqq \tau+h$ sich von den für gleiches t gebildeten u-Koordinaten der $[x, \xi, v]_0, [u]_0$ entsprechenden Bewegung beliebig wenig unterscheiden. Hieraus folgt offenbar, daß man eine Umgebung von $[u]_0$ finden kann, deren u-Stellen zugeordnete Stellen entsprechen, die der $[u]_0$ zugeordneten Stelle beliebig nahe liegen. Damit ist die Stetigkeit für eine Stelle *im Innern* von $|u_\mu| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$ bewiesen.

Der Beweis der Stetigkeit für eine Stelle auf dem Rande von $|u_\mu| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$ wird durch analoge Betrachtungen geführt. Eine ähnliche Rolle wie im Vorhergehenden das Intervall $\tau-h \leqq t \leqq \tau+h$, spielt dabei ein Intervall $\tau \leqq t \leqq \tau+h$ oder — was wegen $t_0=\tau$ dasselbe ist — ein Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_0+h$.

Wir können somit die Stetigkeit der Zuordnung als erwiesen betrachten. Jeder Stelle des Gebietes $-\frac{d}{2\sqrt{N}} \leqq u_\mu \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$ entspricht daher nach dem Vorhergehenden eine bestimmte Stelle $U_1, U_2, \ldots U_N$ auf dem Rande des eben genannten Gebietes, wobei einer Randstelle diese Stelle selbst entspricht. Dabei sind die $U_1, U_2, \ldots U_N$ stetige Funktionen der $u_1, u_2, \ldots u_N$. Nun haben wir aber gezeigt (vergl. § 3, I), daß eine solche Zuordnung *nicht* existieren kann. Wir sind somit zu einem Widerspruch gelangt und müssen unsere versuchsweise gemachte Annahme fallen lassen. Unser Satz ist daher bewiesen.

Analog wird folgender Satz bewiesen:

Jede x, ξ, u-Stelle des Gebietes

$$|\xi_i| \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}}, \qquad p_i |x_i| \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}}, \qquad |u_\mu| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

kann man durch eine v-Stelle des Gebietes

$$|v_\mu| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

zu einer x, ξ, u, v-Stelle ergänzen, welche als Anfangsstelle genommen, eine für abnehmende t im Gebiete (A, B) bleibende Lösung gibt.

§ 10. Nähere Betrachtung der Mannigfaltigkeit der im vorigen Paragraphen eingeführten Lösungen.

Wir wollen setzen

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{q(p+2)}{p(q+1)}}, \qquad \varepsilon = \frac{2\sqrt{N}q}{\sqrt{M+N}+\sqrt{N}}$$

und uns davon überzeugen, *daß das Gebiet (H) diejenigen Eigenschaften besitzt, welche wir im § 6 für Ω nachwiesen, wenn gesetzt wird*

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_M = 1, \qquad m_1 = m_2 = \cdots = m_N = \lambda, \qquad \sigma = \varepsilon.$$

Die Werte von Γ und Δ, die nach § 6 den gewählten l, m-Werten entsprechen, sind, da $\mathfrak{g}(1, \lambda) = 1$,

$$\Gamma = \frac{\sqrt{2M+N}}{\mathfrak{k}(1, \lambda)}, \qquad \Delta = \sqrt{M+N},$$

wobei $\mathfrak{k}(1, \lambda)$ den kleinsten der Werte $1, p, 2\lambda \cdot \frac{q}{1+q}$ bedeutet. $\frac{1}{\mathfrak{k}(1,\lambda)}$ ist daher der größte der Werte $1, \frac{1}{p}, \frac{1+q}{2\lambda q}$. Anstatt $\frac{1+q}{2\lambda q}$ können wir schreiben $\frac{1}{2q} + \frac{p+1}{p}$. Der größte dieser drei Werte ist offenbar der letzte. Es ist daher

$$\Gamma = \sqrt{2M+N}\left(\frac{p+1}{p} + \frac{1}{2q}\right).$$

Die Richtigkeit unserer Behauptung ist erwiesen, sobald wir zeigen, daß die partiellen Ableitungen von X_i, Y_μ nach $x_i, \xi_i, y_\mu, \eta_\mu$ für die Stellen von (H) dem absoluten Betrage nach kleiner sind als

$$\frac{q}{(\Gamma + \frac{1+q}{2q}\sqrt{N})(\Delta + \sqrt{N})} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{2\sqrt{N}(\Gamma + \frac{1+q}{2q}\sqrt{N})},$$

wobei Γ, Δ und ε durch ihre oben erwähnten Werte zu ersetzen sind. Die eben hingeschriebenen Ausdrücke werden beide gleich

$$\frac{q}{[\sqrt{2M+N}\left(\frac{p+1}{p} + \frac{1}{2q}\right) + \frac{1+q}{2q}\sqrt{N}][\sqrt{M+N}+\sqrt{N}]}.$$

Nun wissen wir aber aus § 8, daß für das Gebiet (H) die partiellen Ableitungen erster Ordnung der X_i, Y_μ nach den x, ξ, y, η dem absoluten Betrage nach in der Tat kleiner sind als der zuletzt hingeschriebene Ausdruck. Damit ist die Richtigkeit unserer Bemerkung erwiesen.

Es mögen zwei Bewegungen für $t \geqq t_0$ im Gebiete (H) liegen. Die Unterschiede der x, ξ, u, v für diese beiden Bewegungen seien bei gleichen Zeiten x', ξ', u', v'. Wäre nun für ein gewisses $t \geqq t_0$

$$\sum_{i=1}^{M} (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \lambda^2 \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 - \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 < 0,$$

so zeigt die letzte Ungleichung § 6, I, 1, daß $\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2$ für wachsende t-Werte beliebig große Werte annimmt. Dies sieht man leicht, wenn man $2q - \varepsilon > 0$ berücksichtigt. Da nun aber die x, ξ, u, v für die beiden Bewegungen zwischen endlichen Grenzen liegen, so ist das genannte Verhalten unmöglich. Wir schließen daraus, daß für $t \geqq t_0$

$$\sum_{i=1}^{M} (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \lambda^2 \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 \geqq \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2$$

gilt. Hieraus folgt:

Bleiben zwei Bewegungen für $t \geqq t_0$ in (H) und fallen für eines dieser t die x, ξ, v-Koordinaten der beiden Bewegungen zusammen, so fallen beide Bewegungen zusammen.

Wir haben im § 9 (s. S. 217) gesehen, daß jede x, ξ, v-Stelle des Gebietes

$$(\Pi) \qquad |\xi_i| \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}}, \qquad p_i |x_i| \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}}, \qquad |v_\mu| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

durch eine u-Stelle des Gebietes

$$|u_\mu| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

zu einer x, ξ, v, u-Stelle so ergänzt werden kann, daß diese x, ξ, v, u-Stelle als Anfangsstelle eine für wachsende t im Gebiet (A, B) bleibende Lösung gibt. Aus dem eben bewiesenen Satz folgt, daß diese Zuordnung eine *eindeutige* ist. Es erscheinen also hierbei die $u_1, u_2, \ldots u_N$ als eindeutige Funktionen der $x_1, x_2, \ldots x_M, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_M, v_1, v_2, \ldots v_N$ im Gebiet (Π). Wir wollen diese Funktionen mit $[u_1], [u_2], \ldots [u_N]$ bezeichnen und nunmehr ihre *Stetigkeit* nachweisen.

Zu diesem Zweck denken wir uns zwei Stellen des Gebietes (H) gewählt und die zugehörigen Werte von $[u_1], [u_2], \dots [u_N]$ bestimmt. Man erhält so zwei x, ξ, u, v-Stellen, welche als Anfangsstellen genommen Bewegungen liefern, die in (H) bleiben. Also gilt für die Unterschiede der x, ξ, u, v, unter anderem für den Anfangsmoment, die Ungleichung S. 222, Z. 14. Hieraus geht die Stetigkeit der $[u]$-Funktionen unmittelbar hervor.

Analog dem Vorhergehenden beweist man Folgendes: *Bleiben zwei Bewegungen für* $t \lessgtr t_0$ *in* (H) *und fallen für eines dieser* t *die* x, ξ, u*-Koordinaten der beiden Bewegungen zusammen, so fallen beide Bewegungen zusammen.*

Die am Schluß von § 9 *besprochene Zuordnung der* $v_1, v_2, \dots v_N$ *zu den* $x_1, x_2, \dots x_M$, $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_M$, $u_1, u_2, \dots u_N$ *ist eindeutig und stetig.*

Mit $[v_\mu]$ wollen wir Funktionen von x, ξ, u bezeichnen, die den $[u_\mu]$ analog definiert werden.

§ 11. Über die Existenz und die Mannigfaltigkeit von Lösungen, welche für alle t im Gebiet (A, B) bleiben.

Wir wollen irgend eine x, ξ-Stelle aus dem Gebiet (α), d. h.

$$|\xi_i| \lessgtr \frac{d}{3\sqrt{M}}, \qquad p_i |x_i| \lessgtr \frac{d}{3\sqrt{M}}$$

fest wählen. Erhalten x, ξ die gewählten Werte, so sind nach dem Vorhergehenden

$$u_\mu - [u_\mu], \qquad v_\mu - [v_\mu] \qquad (\mu = 1, 2, \dots N)$$

Funktionen der $u_1, u_2, \dots u_N$, $v_1, v_2, \dots v_N$, welche im Gebiete (B), d. h.

$$|u_\mu| \lessgtr \frac{d}{2\sqrt{N}}, \qquad |v_\mu| \lessgtr \frac{d}{2\sqrt{N}},$$

definiert und daselbst stetig sind. Wir werden zeigen, *daß es eine* u, v*-Stelle des Gebietes* (B) *geben muß, wo die hingeschriebenen* $2N$ *Funktionen sämtlich verschwinden.*

Wir nehmen versuchsweise an, daß unsere Behauptung sich einmal nicht bewahrheite. Dann muß nach dem Satz am Schluß von § 4, II eine Stelle auf der Umgrenzung von (B) existieren, für welche für $\mu = 1, 2, \dots N$

$$u_\mu - [u_\mu] = -\nu \cdot u_\mu, \qquad v_\mu - [v_\mu] = -\nu \cdot v_\mu, \qquad \nu > 0$$

gilt. Da eine solche Stelle auf der Umgrenzung von (B) liegt, ist mindestens eine der u, v-Größen dabei dem absoluten Betrage nach gleich $\frac{d}{2\sqrt{N}}$. Eine der letzten Gleichungen ergibt also: $(1+\nu)\frac{d}{2\sqrt{N}}$ ist gleich einer der Größen $|[u_1]|, |[u_2]|, \ldots |[u_N]|, |[v_1]|, |[v_2]|, \ldots |[v_N]|$ für die genannte Randstelle. Dies ist aber unmöglich, da die $[u_\mu]$ und $[v_\mu]$ gemäß ihrer Definition dem absoluten Betrage nach nicht größer sind als $\frac{d}{2\sqrt{N}}$. Somit müssen wir unsere versuchsweise gemachte Annahme fallen lassen. Unsere Behauptung ist daher richtig. Wir haben also mindestens für eine Stelle des Gebietes (B)

$$u_\mu = [u_\mu], \qquad v_\mu = [v_\mu]. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots N)$$

Wir kombinieren nunmehr die fest gewählte x, ξ-Stelle mit einer u, v-Stelle der eben beschriebenen Art zu einer x, ξ, u, v-Stelle und nehmen letztere als Anfangsstelle einer Bewegung. Dann zeigen die Gleichungen $u_\mu = [u_\mu]$, daß diese Bewegung für wachsende t im Gebiet (A, B) bleibt, während die Gleichungen $v_\mu = [v_\mu]$ dartun, daß die Bewegung auch für abnehmende t im Gebiete (A, B) bleibt. Wir haben somit eine Bewegung, die für alle t im Gebiete (A, B) bleibt. Es gilt daher folgender Satz:

Jede Stelle des Gebietes (α), d. h. des Gebietes

$$|\xi_i| \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}}, \qquad p_i |x_i| \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}},$$

kann durch eine u, v-Stelle des Gebietes (B), d. h. des Gebietes

$$|u_\mu| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}, \qquad |v_\mu| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}},$$

zu einer x, ξ, u, v-Stelle ergänzt werden, welche als Anfangsstelle genommen eine für alle t im Gebiete (A, B) bleibende Lösung liefert.

Wir wollen uns nun zwei Bewegungen vorstellen, welche für alle t in (H) bleiben. Die Unterschiede der x, ξ, u, v für die beiden Bewegungen zu gleichen Zeiten wollen wir mit x', ξ', u', v' bezeichnen. Dann lehrt § 10 S. 222, daß für alle t

$$\sum_{i=1}^{M} (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \lambda^2 \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 \geqq \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2$$

gilt. Hierzu können wir die analoge Beziehung

$$\sum_{i=1}^{M} (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \lambda^2 \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 \geqq \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2$$

hinzufügen. Hierbei ist $0<\lambda<1$. Aus den beiden gleichzeitig erfüllten Beziehungen folgt

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2+p_i^2\,x_i'^2)\geqq\frac{(1-\lambda^2)}{2}\Big[\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2+\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2\Big].$$

Sollte einmal $x_1'=x_2'=\cdots=x_M'=\xi_1'=\xi_2'=\cdots=\xi_M'=0$ gelten, so haben wir folglich auch $u_1'=u_2'=\cdots=u_N'=v_1'=v_2'=\cdots=v_N'=0$, d. h. die Bewegungen fallen zusammen.

Bleiben also zwei Bewegungen in (H) für alle t und fallen die x, ξ-Koordinaten der beiden Bewegungen in einem Moment zusammen, so fallen die Bewegungen überhaupt zusammen.

Hieraus folgt unmittelbar, daß die S. 224 erwähnte Zuordnung der u, v zu den x, ξ eine *eindeutige* ist. Die u, v erscheinen also als eindeutige Funktionen der x, ξ im Gebiete (α), d. h. $|\xi_i|\leqq\frac{d}{3\sqrt{M}}$, $p_i|x_i|\leqq\frac{d}{3\sqrt{M}}$. Diese Funktionen der x, ξ wollen wir mit $\{u_1\}, \{u_2\}, \ldots \{u_N\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \ldots \{v_N\}$ bezeichnen. Es ist leicht ihre Stetigkeit nachzuweisen.

Es mögen nämlich zwei x, ξ-Stellen des Gebietes (α) gewählt sein. Wir bestimmen dazu die entsprechenden $\{u\}, \{v\}$-Werte. Auf diese Weise gewinnen wir zwei x, ξ, u, v-Stellen, die als Anfangsstellen für denselben Moment zwei Bewegungen liefern, die für alle t in (H) bleiben. Es gilt daher für die beiden Bewegungen die oben (s. Z. 3) angeführte Beziehung. Aus dieser Beziehung folgt unmittelbar die Stetigkeit der $\{u\}, \{v\}$-Funktionen.

§ 12. Über asymptotische Lösungen.

h möge eine positive Größe $<q$ bedeuten. Das, soweit die x, y in Frage kommen, innerhalb des Gebietes $(\mathfrak{T})$ (vgl. § 5) gelegene Gebiet (J)

$$|\xi_i|, p_i|x_i|\leqq A_i, \qquad |\eta_\mu|, q_\mu|y_\mu|\leqq B_\mu, \qquad A_\mu, B_\mu>0$$

sei so gewählt, daß in ihm die partiellen Ableitungen erster Ordnung der X, Y nach den x, y, ξ, η absolut kleiner sind als

$$h\cdot\frac{T}{2(M+N)} \qquad \text{und} \qquad (q-h)\frac{T}{2(M+N)},$$

wobei T die kleinste der Zahlen $p, 1, \frac{2q}{1+q}$ ist. Dann gilt folgender Satz:

Es liege eine Bewegung σ *für* $t \geqq t_0$ *in dem Gebiete* (K)

$$|\xi_i|, p_i|x_i| \leqq A_i - H, \qquad |u_\mu|, |v_\mu| \leqq B_\mu - H,$$

wobei H *eine positive Konstante ist. Die von dieser Bewegung für* $t = t_0$ *gelieferte v-Stelle bezeichnen wir mit* v_0. *Wählt man nun eine beliebige v-Stelle, deren Entfernung**) *von* v_0 *gleich oder kleiner als* H *ist, so gibt es eine und nur eine Bewegung, die diese v-Stelle für* $t = t_0$ *liefert, für* $t \geqq t_0$ *in* (J) *bleibt***) *und für* $t \to \infty$ *der Bewegung* σ *in der Weise asymptotisch zustrebt, daß die mit* e^{ht} *multiplizierten für gleiche Zeiten gebildeten Unterschiede der Koordinaten* x, ξ, y, η *dem absoluten Betrage nach für* $t \geqq t_0$ *unterhalb einer endlichen Grenze****) *bleiben.*

Indem wir zum Beweise dieses Satzes übergehen, bemerken wir zunächst, daß wir die x_i, ξ_i, u_μ, v_μ-Koordinaten der Bewegung σ mit $\alpha_i, \beta_i, \gamma_\mu, \delta_\mu$ bezeichnen wollen. Wir haben dann nach den Voraussetzungen für $t \geqq t_0$

$$|\beta_i|, p_i|\alpha_i| \leqq A_i - H, \qquad |\gamma_\mu|, |\delta_\mu| \leqq B_\mu - H.$$

Wir wählen nun eine positive Zahl ε so aus, daß das Gebiet

$$(1.) \quad |\xi_i|, p_i|x_i| \leqq A_i + 2(e^{h\varepsilon} - 1)H, \qquad |\eta_\mu|, q_\mu|y_\mu| \leqq B_\mu + 2(e^{h\varepsilon} - 1)H,$$

soweit die x, y in Frage kommen, innerhalb des von Anfang an zugrunde gelegten Gebietes $(\mathfrak{T})$ (vgl. § 5) liegt, so daß also in (1.) die partiellen Ableitungen erster Ordnung der X_i, Y_μ absolut unter einer endlichen Grenze liegen. Ferner bestimmen wir eine positive Zahl $\vartheta < \varepsilon$ derart, daß die Bewegung σ für $t_0 - \vartheta < t \leqq t_0$ den Bedingungen

$$|\beta_i|, p_i|\alpha_i| \leqq A_i - H + (e^{h\varepsilon} - 1)H, \qquad |\gamma_\mu|, |\delta_\mu| \leqq B_\mu - H + (e^{h\varepsilon} - 1)H$$

genügt.

Sind nun a_i, b_i, g_μ, d_μ Größen, welche den Bedingungen

$$(2.) \qquad |b_i|, p_i|a_i| \leqq e^{h(\varepsilon - \vartheta)} \cdot H, \qquad |g_\mu|, |d_\mu| \leqq e^{h(\varepsilon - \vartheta)} \cdot H$$

*) Unter der Entfernung zweier Stellen verstehen wir die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Koordinatenunterschiede.

**) Die oben charakterisierte Bewegung bleibt außerdem im Gebiete

$$|\xi_i|, p_i|x_i| \leqq A^i, \qquad |u_\mu|, |v_\mu| \leqq B_\mu.$$

***) Man kann sich leicht überzeugen, daß die mit e^{ht} multiplizierten Koordinatenunterschiede für $t \to \infty$ nach 0 konvergieren. Man braucht zu diesem Zweck nur zu beachten, daß das einem bestimmten h-Wert entsprechende Gebiet (J) immer auch einem gewissen größeren h-Wert entspricht.

genügen, so gilt für $\tau = t - t_0 > -\vartheta$

$$|\beta_i + e^{-h\tau}\, b_i|,\ p_i\,|\alpha_i + e^{-h\tau}\, a_i| \leqq A_i + 2\,(e^{h\varepsilon} - 1)\,H,$$
$$|\gamma_\mu + e^{-h\tau}\, g_\mu|,\ |\delta_\mu + e^{-h\tau}\, d_\mu| \leqq B_\mu + 2\,(e^{h\varepsilon} - 1)\,H.$$

Die Stelle, für welche

$$x_i = \alpha_i + e^{-h\tau}\, a_i, \qquad \xi_i = \beta_i + e^{-h\tau}\, b_i,$$
$$u_\mu = \gamma_\mu + e^{-h\tau}\, g_\mu, \qquad v_\mu = \delta_\mu + e^{-h\tau}\, d_\mu$$

ist, liegt daher, wie leicht zu sehen, im Gebiete (1.). Nunmehr konstruieren wir die Differentialgleichungen

$$\frac{da_i}{dt} = h a_i + b_i,$$

$$\frac{db_i}{dt} = h b_i - p_i^2\, a_i + e^{h\tau}\Big[X_i(\alpha_i + e^{-h\tau}\, a_i, \beta_i + e^{-h\tau}\, b_i, \bar{y}_\mu, \bar{\eta}_\mu) - X_i\Big(\alpha_i, \beta_i, \frac{\gamma_\mu - \delta_\mu}{2q_\mu}, \frac{\delta_\mu + \gamma_\mu}{2}\Big)\Big],$$

$$\frac{dg_\mu}{dt} = (h + q_\mu)\, g_\mu + e^{h\tau}\Big[Y_\mu(\alpha_i + e^{-h\tau}\, a_i, \beta_i + e^{-h\tau}\, b_i, \bar{y}_\mu, \bar{\eta}_\mu) - Y_\mu\Big(\alpha_i, \beta_i, \frac{\gamma_\mu - \delta_\mu}{2q_\mu}, \frac{\delta_\mu + \gamma_\mu}{2}\Big)\Big],$$

$$\frac{dd_\mu}{dt} = (h - q_\mu)\, d_\mu + e^{h\tau}\Big[Y_\mu(\alpha_i + e^{-h\tau}\, a_i, \beta_i + e^{-h\tau}\, b_i, \bar{y}_\mu, \bar{\eta}_\mu) - Y_\mu\Big(\alpha_i, \beta_i, \frac{\gamma_\mu - \delta_\mu}{2q_\mu}, \frac{\delta_\mu + \gamma_\mu}{2}\Big)\Big].$$

Hierbei sind $\bar{y}_\mu, \bar{\eta}_\mu$ die y, η-Koordinaten einer Stelle, für die

$$u_\mu = \gamma_\mu + e^{-h\tau}\, g_\mu, \qquad v_\mu = \delta_\mu + e^{-h\tau}\, d_\mu$$

ist; also gilt

$$\bar{y}_\mu = \frac{(\gamma_\mu + e^{-h\tau}\, g_\mu) - (\delta_\mu + e^{-h\tau}\, d_\mu)}{2q_\mu}, \qquad \bar{\eta}_\mu = \frac{(\gamma_\mu + e^{-h\tau}\, g_\mu) + (\delta_\mu + e^{-h\tau}\, d_\mu)}{2}.$$

Die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen sind für $t > t_0 - \vartheta$ und die a_i, b_i, g_μ, d_μ des Gebietes (2.) definierte Funktionen, welche daselbst in $t, a_i, b_i, g_\mu, d_\mu$ stetig sind. Außerdem genügen sie für $t_1 \leqq t \leqq t_2$ und die a_i, b_i, g_μ, d_μ des Gebietes (2.) den *Lipschütz*schen Bedingungen, wenn t_1 und $t_2 > t_0 - \vartheta$, sonst beliebig, gewählt sind.

Ist $t \geqq t_0$ und liegen b_i, a_i, g_μ im Gebiete

$$(3.) \qquad \sum_{i=1}^{M}(b_i^2+p_i^2 a_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N} g_\mu^2 \leqq H^2$$

sowie d_μ im Gebiete

$$(4.) \qquad \sum_{\mu=1}^{N} d_\mu^2 \leqq H^2,$$

so liegt die Stelle, für welche

$$x_i = \alpha_i + e^{-h\tau}\, a_i, \qquad \xi_i = \beta_i + e^{-h\tau}\, b_i,$$
$$u_\mu = \gamma_\mu + e^{-h\tau}\, g_\mu, \qquad v_\mu = \delta_\mu + e^{-h\tau}\, d_\mu,$$

in dem Gebiet (J). Unter dieser Annahme haben wir dann, wie leicht zu sehen,

$$\frac{d}{dt}\Big\{\sum_{i=1}^{M}(b_i^2+p_i^2 a_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N} g_\mu^2\Big\} \geqq 2h \sum_{i=1}^{M}(b_i^2+p_i^2 a_i^2)+2\sum_{\mu=1}^{N}(h+q_\mu) g_\mu^2$$
$$-2\cdot h\cdot \frac{T}{2(M+N)}\Big[\sum_{i=1}^{M}|b_i|+\sum_{\mu=1}^{N}|g_\mu|\Big]\Big[\sum_{i=1}^{M}(|a_i|+|b_i|)+\frac{1+q}{2q}\sum_{\mu=1}^{N}(|g_\mu|+|d_\mu|)\Big]$$

sowie

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{N} d_\mu^2 \leqq 2(h-q)\sum_{\mu=1}^{N} d_\mu^2+2(q-h)\cdot\frac{T}{2(M+N)}\Big[\sum_{i=1}^{M}(|a_i|+|b_i|)$$
$$+\frac{1+q}{2q}\sum_{\mu=1}^{N}(|g_\mu|+|d_\mu|)\Big]\sqrt{N}\cdot\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} d_\mu^2}.$$

Dabei gilt

$$\sum_{i=1}^{M}|b_i|+\sum_{\mu=1}^{N}|g_\mu| \leqq \sqrt{M+N}\cdot H,$$

$$\sum_{i=1}^{M}(|a_i|+|b_i|)+\frac{1+q}{2q}\sum_{\mu=1}^{N}(|g_\mu|+|d_\mu|) \leqq \frac{1}{T}\Big(\sum_{i=1}^{M}(p_i|a_i|+|b_i|)$$
$$+\sum_{\mu=1}^{N}|g_\mu|\Big)+\frac{1+q}{2q}\sum_{\mu=1}^{N}|d_\mu|$$
$$\leqq\Big(\frac{\sqrt{2M+N}}{T}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\Big)H.$$

Sollte nun einmal außerdem noch

$$\sum_{i=1}^{M}(b_i^2+p_i^2 a_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N} g_\mu^2 = H^2$$

gelten, so haben wir

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{M}(b_i^2+p_i^2 a_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N} g_\mu^2\right\}$$

$$\geqq 2h\cdot H^2-2h\frac{T}{2(M+N)}\sqrt{M+N}\left(\frac{\sqrt{2M+N}}{T}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)H^2$$

$$\geqq 2hH^2\left[1-\frac{\sqrt{2M+N}}{2\sqrt{M+N}}-\frac{\sqrt{N}}{2\sqrt{M+N}}\right].$$

Nun ist aber

$$(\sqrt{2M+N}+\sqrt{N})^2=2(M+N)+2\sqrt{(M+N)^2-M^2}<4(M+N),$$

also

$$1-\frac{\sqrt{2M+N}+\sqrt{N}}{2\sqrt{M+N}}>0.$$

Somit ist unter den gemachten Annahmen

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{M}(b_i^2+p_i^2 a_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N} g_\mu^2\right\}>0. \tag{5.}$$

Wir wollen nun von der Annahme S. 228 (unten) absehen, dagegen annehmen, es sei einmal $\sum_{\mu=1}^{N} d_\mu^2=H^2$. Dann erhalten wir nach S. 228

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{N} d_\mu^2\leqq 2(h-q)H^2+2(q-h)\frac{T}{2(M+N)}\left(\frac{\sqrt{2M+N}}{T}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)H\sqrt{N}\cdot H$$

$$\leqq -2(q-h)H^2\left[1-\frac{\sqrt{N}\sqrt{2M+N}}{2(M+N)}-\frac{N}{2(M+N)}\right].$$

Nun ist

$$1-\frac{\sqrt{N}\sqrt{2M+N}}{2(M+N)}-\frac{N}{2(M+N)}\geqq 1-\frac{\sqrt{2M+N}+\sqrt{N}}{2\sqrt{M+N}}>0$$

(vergl. die vor (5.) stehende Ungleichung).

Also ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{N} d_\mu^2<0. \tag{6.}$$

Auf die eben gewonnenen Ergebnisse gestützt, können wir nun beweisen, daß zu jeder d-Stelle $[d]_0$ des Gebietes (4.) mindestens eine solche b, a, g-Stelle $[b, a, g]_0$ des Gebietes (3.) gefunden werden kann, daß $[b, a, g]_0, [d]_0$, als Anfangsstelle für $t=t_0$ genommen, eine für $t\geqq t_0$ im Gebiete (3.), (4.) bleibende Lösung liefert.

Der Beweis geschieht ähnlich, wie bei einer früheren Untersuchung (vergl. § 9), weshalb wir ihn bloß andeuten. Man schließt nämlich mit Hülfe der unter gewissen, oben charakterisierten Umständen geltenden Ungleichungen (5.) und (6.) folgendes: Würde unsere Behauptung für eine d-Stelle des Gebietes (4.) nicht zutreffen, so würde, wie man auch die d-Stelle durch eine b, a, g-Stelle des Gebietes (3.) ergänzen möge, die entsprechende Lösung das Gebiet (3.), (4.) für einen *bestimmten* Moment $\mathfrak{t} \overline{\overline{>}} t_0$ unter folgenden Umständen verlassen: Die Bewegung bleibt für $t_0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} \mathfrak{t}$ im Gebiete (3.), (4), es ist dies aber für kein Intervall $\mathfrak{t} \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} \mathfrak{t} + \pi$ $(\pi > 0)$ der Fall. Dieses Vorkommnis geschieht an einer Stelle, deren b, a, g-Koordinaten eine Stelle auf dem Rande von (3.) darstellen. Auf diese Weise kann jeder b, a, g-Stelle des Gebietes (3.) eine Randstelle desselben Gebietes eindeutig zugeordnet werden. Diese Zuordnung ist stetig und den Randstellen entsprechen diese Stellen selbst. Andererseits ist uns bekannt (nach § 3, III), daß eine derartige Zuordnung nicht möglich ist. Somit ist unsere Behauptung richtig.

Es ist nun leicht, den ersten Teil des Satzes S. 226 zu beweisen.

Es sei eine v-Stelle V mit den Koordinaten $V_1, V_2, \ldots V_N$ gewählt, deren Entfernung von v_0 gleich oder kleiner als H ist. Wir haben also

$$\sum_{\mu=1}^{N} (\delta_\mu (t_0) - V_\mu)^2 \overline{\overline{<}} H^2.$$

Wir bestimmen hierauf eine solche Lösung der Differentialgleichungen (S. 227), daß für $t = t_0$

$$d_\mu = -\delta_\mu (t_0) + V_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots N)$$

gilt und die Lösung für $t \overline{\overline{<}} t_0$ im Gebiete (3.), (4.) bleibt. Dies ist nach dem eben Bewiesenen möglich. Die Elemente dieser Lösung wollen wir mit a_i, b_i, g_μ, d_μ bezeichnen. Wir haben dann für $t \overline{\overline{<}} t_0$

$$|\beta_i + e^{-h\tau} b_i|, \quad p_i |\alpha_i + e^{-h\tau} a_i| \overline{\overline{<}} A_i,$$
$$|\gamma_\mu + e^{-h\tau} g_\mu|, \quad |\delta_\mu + e^{-h\tau} d_\mu| \overline{\overline{<}} B_\mu$$

und für $t = t_0$

$$\delta_\mu + e^{-h\tau} d_\mu = V_\mu.$$

Endlich erkennen wir leicht, daß

$$x_i = \alpha_i + e^{-ht}\, a_i, \qquad \xi_i = \beta_i + e^{-ht}\, b_i,$$

$$y_\mu = \frac{\gamma_\mu + e^{-ht}\, g_\mu - (\delta_\mu + e^{-ht}\, d_\mu)}{2 q_\mu}, \qquad \eta_\mu = \frac{\gamma_\mu + e^{-ht}\, g_\mu + \delta_\mu + e^{-ht}\, d_\mu}{2},$$

eine Lösung der von uns zu Grunde gelegten Differentialgleichungen darstellt. Diese Lösung bleibt für $t \gtreqless t_0$ offenbar in dem Gebiet (J) und auch in dem Gebiet

$$p_i |x_i|, \ |\xi_i| \lesseqgtr A_i, \qquad |u_\mu|, \ |v_\mu| \lesseqgtr B_\mu.$$

Für $t = t_0$ aber gilt

$$v_\mu = \eta_\mu - q_\mu y_\mu = V_\mu.$$

Die Unterschiede der Koordinaten der eben besprochenen Bewegung und der Bewegung σ sind

$$e^{-ht}\, a_i, \ e^{-ht}\, b_i, \ e^{-ht}\, \frac{g_\mu - d_\mu}{2 q_\mu}, \ e^{-ht}\, \frac{g_\mu + d_\mu}{2}.$$

Es ist offenbar, daß diese Unterschiede auch nach der Multiplikation mit e^{ht} für $t \gtreqless t_0$ zwischen endlichen Grenzen bleiben.

Die besprochene Bewegung genügt also den in unserem Satze genannten Bedingungen.

Um nun auch den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß man eine das Gebiet (J) (vergl. S. 225) enthaltende, soweit x, y in Frage kommen, in $(\mathfrak{T})$ gelegene Umgebung (C_0) von $x = \xi = y = \eta = 0$ bestimmen kann, welche den S. 211 für (C) genannten Bedingungen genügt, wenn $l = m = 1$ gesetzt wird. Es mögen nun zwei Bewegungen vorliegen, die für $t \gtreqless t_0$ in (J) bleiben und der Bewegung σ für $t \to \infty$ so zustreben, daß die mit e^{ht} multiplizierten für gleiche Zeiten gebildeten Unterschiede ihrer x, ξ, y, η-Koordinaten von den Koordinaten der σ-Bewegung dem absoluten Betrage nach für $t \gtreqless t_0$ unter endlichen Grenzen bleiben. Dann bleiben auch für die beiden vorausgesetzten Bewegungen die mit e^{ht} multiplizierten für gleiche Zeiten gebildeten Koordinaten-Unterschiede für $t \gtreqless t_0$ dem absoluten Betrage nach unter endlichen Grenzen. Es ist auf die beiden angenommenen Bewegungen der Satz am Schluß von § 6 anwendbar. Da

$$\omega = e^{2ht}\left[\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 - \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2\right]$$

für $t \to \infty$ nicht nach ∞ konvergiert, so muß für $t > t_0$ stets $\omega \overline{\overline{<}} 0$ gelten. Es muß daher auch für $t = t_0$ $\omega \overline{\overline{<}} 0$ sein. Besitzen die beiden Bewegungen für $t = t_0$, dieselben v-Koordinaten, so ist für $t = t_0$ $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 = 0$. Hieraus folgt für $t = t_0$ $\xi_i' = x_i' = u_\mu' = v_\mu' = 0$ und die Bewegungen fallen zusammen. Damit ist auch der zweite Teil unseres Satzes bewiesen.

Nach unserem Satze sind den v-Stellen, deren Entfernung von v_0 gleich oder kleiner als H ist, Werte x, ξ, u aus dem Gebiete

$$p_i |x_i|, \quad |\xi_i| \overline{\overline{<}} A_i, \qquad |u_\mu| \overline{\overline{<}} B_\mu$$

eindeutig zugeordnet. Wir erhalten so $2M+N$ eindeutige Funktionen von v in dem genannten v-Gebiet; wir wollen sie mit $(x_i), (\xi_i), (u_\mu)$ bezeichnen. *Diese Funktionen sind im genannten v-Gebiet stetig.* Um dies zu beweisen, wählen wir zwei v-Stellen des v-Gebietes. Die Unterschiede der v-Koordinaten der beiden Stellen seien $\Delta v_1, \Delta v_2, \ldots \Delta v_N$. Diesen v-Stellen ordnen wir die entsprechenden Werte der Funktionen $(x_i), (\xi_i), (u_\mu)$ zu und nehmen die so hergestellten zwei Wertsysteme als Anfangswerte der v_μ, x_i, ξ_i, u_μ für zwei Bewegungen zur Zeit $t = t_0$. Die Unterschiede der Funktionswerte für die beiden v-Stellen wollen wir mit $\Delta(x_i), \Delta(\xi_i), \Delta(u_\mu)$ bezeichnen. Für $t \to \infty$ konvergiert offenbar der für die zwei genannten Bewegungen gebildete Ausdruck

$$\omega = e^{2ht}\Big[\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 - \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2\Big]$$

nicht nach ∞. Somit ist für $t = t_0$

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 - \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 \overline{\overline{<}} 0.$$

Also haben wir

$$\sum_{i=1}^{M}([\Delta(\xi_i)]^2 + p_i^2[\Delta(x_i)]^2) + \sum_{\mu=1}^{N}[\Delta(u_\mu)]^2 \overline{\overline{<}} \sum_{\mu=1}^{N}[\Delta v_\mu]^2,$$

woraus sich die behauptete Stetigkeit sofort ergibt.

§ 13. Über asymptotische Lösungen. (Fortsetzung.)

Wir bestimmen eine solche Umgebung (Y) von $x = \xi = y = \eta = 0$, daß ihre Stellen dem Gebiet (H) (s. § 8) angehören und die Differentialquotienten der X_i, Y_μ nach x, ξ, y, η dem absoluten Betrage nach kleiner sind als

$$(1.)\qquad \frac{q}{\left[\sqrt{2M+N}\cdot\sqrt{M+N}\cdot 6\left(1+\frac{1}{p}+\frac{2}{3q}\right)+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right]\left[\frac{1}{6}+\sqrt{N}\right]}.$$

Es sei nun eine Zahl h gemäß der Bedingung $0<h<q$ beliebig aber fest gewählt. Ferner sei e irgend eine positive Zahl, die den folgenden Bedingungen genügt: Das Gebiet

$$(2.)\qquad p_i|x_i|, |\xi_i| \leqq e, \qquad q_\mu|y_\mu|, |\eta_\mu| \leqq \frac{e}{2\sqrt{N}}$$

liegt in (Y). Außerdem sind die Differentialquotienten der X_i, Y_μ nach x, ξ, y, η in diesem Gebiete dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$(3.)\qquad h\cdot\frac{T}{2(M+N)}, \qquad (q-h)\frac{T}{2(M+N)},$$

wobei T dieselbe Bedeutung hat wie zu Anfang des vorigen Paragraphen. Wir beweisen folgenden Satz:

Bleibt eine Bewegung β für $t \geqq t_0$ im Gebiete

$$p_i|x_i|, |\xi_i| \leqq \left(\frac{1}{3\sqrt{M}}-\frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right)e,$$

$$|u_\mu| \leqq \left(\frac{1}{2\sqrt{N}}-\frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right)e, \qquad \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq \left(\frac{e}{9\sqrt{M+N}}\right)^2,$$

so gibt es eine und nur eine für alle t im Gebiete

$$(4.)\qquad p_i|x_i|, |\xi_i| \leqq e, \qquad |u_\mu|, |v_\mu| \leqq \frac{e}{2\sqrt{N}}$$

*bleibende Bewegung ε, welche folgende Eigenschaft besitzt: Die Bewegung β strebt für $t\to\infty$ in der Weise der Bewegung ε zu, daß die mit e^{ht} multiplizierten für gleiche Zeiten gebildeten Unterschiede der x, ξ, y, η-Koordinaten von β und ε für $t \geqq t_0$ dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze**) *bleiben.*

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß der Satz des vorigen Paragraphen anwendbar ist, wenn

$$A_i=\frac{e}{3\sqrt{M}}, \quad B_\mu=\frac{e}{2\sqrt{N}}, \quad H=\frac{2e}{9\sqrt{M+N}}$$

*) Diese mit e^{ht} multiplizierten Koordinatenunterschiede konvergieren, wie man leicht sieht, für $t\to\infty$ nach 0.

gesetzt wird und β die Rolle von σ spielt. Zur Erläuterung möge dabei angeführt werden, daß aus

$$\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq \left(\frac{e}{9\sqrt{M+N}}\right)^2$$

folgt

$$|v_\mu| \leqq \frac{e}{9\sqrt{M+N}} = \left(\frac{1}{3\sqrt{M+N}} - \frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right)e < \left(\frac{1}{2\sqrt{N}} - \frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right)e.$$

Bezeichnen wir nun die von β zur Zeit t_0 eingenommene v-Stelle mit v_0, so ist leicht zu sehen, daß alle v-Stellen des Gebietes

$$\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq \left(\frac{e}{9\sqrt{M+N}}\right)^2 \tag{5.}$$

von der Stelle v_0 nicht mehr als um H abstehen. Dies folgt aus dem Umstande, daß auch v_0 dem Gebiete (5.) angehört und daß bekanntlich immer

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{m}(a_\nu - b_\nu)^2} \leqq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu^2} + \sqrt{\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu^2}$$

unabhängig von den Werten a_ν, b_ν gilt. Für alle Stellen von (5.) sind daher die im vorigen Paragraphen eingeführten Funktionen (x_i), (ξ_i), (u_i) definiert und dabei eindeutig und stetig. Aus der Art der Definition dieser Funktionen folgt, daß

$$p_i\,|(x_i)|,\ |(\xi_i)| \leqq \frac{e}{3\sqrt{M}}, \qquad |(u_\mu)| \leqq \frac{e}{2\sqrt{N}}. \tag{6.}$$

Wählt man eine v-Stelle des Gebietes (5.) und ergänzt sie durch

$$x_i = (x_i), \qquad \xi_i = (\xi_i), \qquad u_\mu = (u_\mu),$$

wobei die rechten Seiten für die gewählte v-Stelle zu bilden sind, so liefert die erhaltene x, ξ, u, v-Stelle, als Anfangsstelle für $t = t_0$ genommen, eine Bewegung, die für $t \geqq t_0$ im Gebiete

$$p_i\,|x_i|,\ |\xi_i| \leqq \frac{e}{3\sqrt{M}}, \qquad |u_\mu|,\ |v_\mu| \leqq \frac{e}{2\sqrt{N}} \tag{7.}$$

bleibt und der Bewegung β *für* $t \to \infty$ in der oben besprochenen besonderen Weise zustrebt. *Wir werden alsbald zeigen, daß man die v-Stelle aus dem*

Gebiet (5.) *so wählen kann, daß die entsprechende nach der eben besprochenen Vorschrift gebildete Bewegung für* $t < t_0$ *im Gebiete* (4.) *bleibt.*

Wir erinnern zunächst an die am Schluß des § 10 eingeführten Funktionen $[v_1], [v_2], \dots [v_N]$. Es sind dies Funktionen der x, ξ, u, welche in unserem Falle (wo e den Bedingungen genügt, welchen d im § 10 unterworfen ist) im Gebiete

$$(8.) \qquad |\xi_i|, p_i|x_i| \leqq \frac{e}{3\sqrt{M}}, \qquad |u_\mu| \leqq \frac{e}{2\sqrt{N}}$$

eindeutig definiert und stetig sind. Ergänzt man eine Stelle $(x, \xi, u)_0$ von (8.) durch diejenige v-Stelle, deren Elemente die Werte der $[v_1], [v_2], \dots [v_N]$ für die Stelle $(x, \xi, u)_0$ sind, und nimmt man die so erhaltene x, ξ, u, v-Stelle als Anfangsstelle einer Bewegung für $t = t_0$, so bleibt die erhaltene Bewegung für $t \leqq t_0$ im Gebiete (4.). Um die Argumente, für welche die Funktionen $[v_\mu]$ gebildet sind, bequemer andeuten zu können, wollen wir die Bezeichnung $[v_\nu] = \psi_\nu(x_i, \xi_i, u_\mu)$ $(\nu = 1, 2, \dots N)$ einführen. Beachtet man (6.), so sieht man leicht, daß die

$$\psi_\nu((x_i), (\xi_i), (u_\mu)) \qquad (\nu = 1, 2, \dots N)$$

im Gebiete (5.) als eindeutige, stetige Funktionen der v definiert sind.

Offenbar ist derjenige Teil unseres Satzes, der sich nur auf die Existenz einer Lösung mit den verlangten Eigenschaften bezieht, bewiesen, wenn wir zeigen, daß aus dem Gebiet (5.) eine solche v-Stelle gewählt werden kann, daß für sie

$$(9.) \qquad v_\nu - \psi_\nu((x_i), (\xi_i), (u_\mu)) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \dots N)$$

gilt. Um die Richtigkeit dieser Bemerkung einzusehen, nehmen wir an, es sei eine solche v-Stelle $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_N$ gefunden. Die zugehörigen Werte von $(x_i), (\xi_i), (u_\mu)$ seien $\bar{x}_i, \bar{\xi}_i, \bar{u}_\mu$. Nach dem oben (vergleiche die auf (6.) folgenden Zeilen) Gesagten liefert $x_i = \bar{x}_i$, $\xi_i = \bar{\xi}_i$, $u_\mu = \bar{u}_\mu$, $v_\mu = \bar{v}_\mu$, als Anfangsstelle für $t = t_0$ genommen, eine Bewegung γ, die für $t \geqq t_0$ im Gebiete (7.) bleibt und der Bewegung β für $t \to \infty$ in der uns bekannten Art zustrebt. Es bleiben nämlich für $t \geqq t_0$ die mit e^{ht} multiplizierten für gleiche Zeiten gebildeten Unterschiede der Koordinaten x, ξ, y, η für die Bewegungen β und γ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze.

Andererseits folgt aus dem Erfülltsein der Gleichungen (9.)

$$(\text{für } x_i=\bar{x}_i, \quad \xi_i=\bar{\xi}_i, \quad u_\mu=\bar{u}_\mu, \quad v_\mu=\bar{v}_\mu)$$

und aus dem oben (vergl. die Zeilen, die der Einführung des Gebietes (8.) folgen) Gesagten, daß die Bewegung γ für $t<t_0$ im Gebiete (4.) bleibt. Es bleibt daher γ für *alle* t im Gebiete (4.). Wir sehen, daß γ allen in unserem Satze gestellten Forderungen genügt. Um den in Rede stehenden Teil unseres Satzes zu erledigen, haben wir somit noch zu beweisen, daß die Gleichungen (9.) durch ein v-System des Gebietes (5.) befriedigt werden können.

Um diesen Beweis vorzubereiten, zeigen wir zunächst, daß das Gebiet (Y) die Eigenschaften besitzt, welche wir in § 6, I für (Ω) nachgewiesen haben, wenn gesetzt wird

$$l_i=\frac{1}{6\sqrt{M+N}}, \qquad m_\mu=\frac{1}{8\sqrt{M+N}}, \qquad \sigma=\frac{2q\sqrt{N}}{\frac{1}{6}+\sqrt{N}}.$$

Zu diesem Zweck bemerken wir, daß in unserem Fall $\mathfrak{f}(l,m)$ (vergl. bezüglich der Bezeichnung den Schluß von § 6, I) der kleinste der Werte $\frac{1}{6\sqrt{M+N}}, \frac{1}{6\sqrt{M+N}}\cdot p, \frac{1}{8\sqrt{M+N}}\cdot\frac{2q}{1+q}$ ist. $\frac{1}{\mathfrak{f}(l,m)}$ ist also der größte der Werte

$$6\sqrt{M+N}, \qquad 6\sqrt{M+N}\cdot\frac{1}{p}, \qquad 4\sqrt{M+N}\left(1+\frac{1}{q}\right).$$

Offenbar ist daher

$$\frac{1}{\mathfrak{f}(l,m)}<6\sqrt{M+N}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{2}{3q}\right).$$

$\mathfrak{g}(l,m)$ ist in unserem Fall gleich $\frac{1}{6\sqrt{M+N}}$. Somit ergibt sich für die Werte l, m unseres Falles

$$\frac{q}{\left(\frac{\sqrt{2M+N}}{\mathfrak{f}(l,m)}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)\left(\mathfrak{g}(l,m)\sqrt{M+N}+\sqrt{N}\right)}$$

$$>\frac{q}{\left[6\sqrt{2M+N}\sqrt{M+N}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{2}{3q}\right)+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right]\left[\frac{1}{6}+\sqrt{N}\right]}.$$

Nun wissen wir aber (vgl. den Anfang dieses Paragraphen), daß im Gebiet (Y) die Differentialquotienten der X_i, Y_μ nach x, ξ, y, η dem absoluten Betrage nach

kleiner sind als die rechts stehende Größe, also sind sie auch absolut kleiner als die links stehende Größe. Daraus folgt, daß (Y) die Eigenschaften von (Ω) a. a. O. besitzt, wenn $\sigma = \sigma(l, m)$ (vgl. den Schluß von § 6, I) gesetzt wird, wobei l, m die oben für unseren Fall festgesetzten Werte haben. Man erhält

$$\sigma(l,m) = \frac{2q\sqrt{N}}{g(l,m)\sqrt{M+N}+\sqrt{N}} = \frac{2q\sqrt{N}}{\frac{1}{6}+\sqrt{N}},$$

sodaß unsere (Y) betreffende Behauptung bewiesen ist. Man beachte, daß $\sigma < 2q$ ist.

Es möge nun eine Bewegung vorliegen, die für $t \leqq t_0$ in (Y) bleibt. Dann folgt nach einer schon früher benutzten Schlußweise leicht aus § 6, I (4.), daß für $t = t_0$

$$(10.) \qquad \frac{1}{36(M+N)} \sum_{i=1}^{M} (\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2) + \frac{1}{64(M+N)} \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2 \geqq \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2$$

sein muß.

Nunmehr wenden wir uns zum Beweise der Behauptung, daß eine v-Stelle des Gebietes (5.) existieren muß, für welche die Gleichungen (9.) erfüllt sind. Wir nehmen versuchsweise an, ein solches v-System existiere nicht. Dann gibt es nach § 4, I eine v-Stelle auf dem Rande von (5.), für welche

$$v_\nu - \psi_\nu((x_i),(\xi_i),(u_\mu)) = -P \cdot v_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots N)$$
$$P > 0.$$

Hieraus folgt weiter für die genannte Randstelle von (5.)

$$(11.) \qquad (1+P)^2 \sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{N} \psi_\nu^2((x_i),(\xi_i),(u_\mu)).$$

Fassen wir die $(x_i), (\xi_i), (u_\mu), \psi_\nu((x_i),(\xi_i),(u_\mu))$, gebildet für die genannte Randstelle, als x, ξ, u, v-Stelle auf, so liegt diese Stelle im Gebiete (7.) und, wenn wir diese Stelle als Anfangsstelle einer Bewegung für $t = t_0$ nehmen, so bleibt diese Bewegung für $t \leqq t_0$ im Gebiete (2.) und daher auch in (Y). Folglich haben wir für $t = t_0$ die Beziehung (10.), also

$$\frac{1}{36(M+N)} \sum_{i=1}^{M} ((\xi_i)^2 + p_i^2 (x_i)^2) + \frac{1}{64(M+N)} \sum_{\mu=1}^{N} (u_\mu)^2 \geqq \sum_{\nu=1}^{N} [\psi_\nu((x_i),(\xi_i),(u_\mu))]^2,$$

wobei alle Größen für die in Rede stehende Randstelle von (5.) zu bilden sind. Wir haben also mit Rücksicht auf (6.)

$$\sum_{\nu=1}^{N} [\psi_\nu((x_i),(\xi_i),(u_\mu))]^2 \leqq \frac{1}{36(M+N)} \cdot \frac{2e^2}{9} + \frac{1}{64(M+N)} \cdot \frac{e^2}{4}.$$

Berücksichtigen wir diese Beziehung, ferner (11.) und bemerken, daß für eine Randstelle von (5.) $\sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2 = \frac{e^2}{81(M+N)}$ gilt, so erhalten wir

$$(1+P)^2 \frac{e^2}{81(M+N)} \leqq \frac{1}{36(M+N)} \cdot \frac{2e^2}{9} + \frac{1}{64(M+N)} \cdot \frac{e^2}{4} = \frac{e^2}{81(M+N)} \cdot \frac{209}{256}.$$

Diese Beziehung ist aber offenbar unmöglich. Der Widerspruch, zu dem wir gelangt sind, zwingt uns, unsere versuchsweise gemachte Annahme fallen zu lassen. Der Beweis, um den es sich handelt, ist also geliefert, und damit ist auch der oben charakterisierte Teil unseres Hauptsatzes erledigt.

Um nun den noch verbleibenden Rest unserer Behauptungen zu beweisen, wollen wir versuchsweise annehmen, es gäbe zwei für *alle* t im Gebiete (2.) bleibende Bewegungen τ_1 und τ_2, denen sich β in der Weise nähert, daß die mit e^{ht} multiplizierten für gleiche t gebildeten Unterschiede der x, ξ, y, η-Koordinaten für $t \leqq t_0$ dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze bleiben. Hieraus folgt, daß auch die mit e^{ht} multiplizierten für gleiche t gebildeten Unterschiede der x, ξ, y, η-Koordinaten von τ_1 und τ_2 für $t \geqq t_0$ dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze bleiben. Es konvergiert daher die auf τ_1 und τ_2 bezügliche Größe

$$\omega = e^{2ht}\left[\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 - \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2\right]$$

für $t \to \infty$ *nicht* nach ∞. Man kann nun eine das Gebiet (2.) enthaltende und in (Y) gelegene Umgebung (C_1) von $x=\xi=y=\eta=0$ finden, welche den § 6, II für (C) genannten Bedingungen genügt, wenn $l=m=1$ gesetzt wird. Wir können daher den Satz in § 6, II anwenden und erhalten, wie man leicht sieht, für $t=t_0$

$$(12.) \qquad \sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 \leqq \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2.$$

Ferner sahen wir S. 236, daß das Gebiet (Y) die Eigenschaften besitzt, welche wir in § 6, I für (Ω) nachgewiesen haben, wenn gesetzt wird

$$l_i=\frac{1}{6\sqrt{M+N}},\qquad m_\mu=\frac{1}{8\sqrt{M+N}},\qquad \sigma=\frac{2q\sqrt{N}}{\frac{1}{6}+\sqrt{N}}.$$

Da nun τ_1 und τ_2 *immer* in (Y) liegen, so ergibt sich aus § 6, I, 2 nach einer schon oft benutzten Schlußweise für $t=t_0$

$$(13.)\quad \frac{1}{36(M+N)}\sum_{i=1}^{M}(\xi_i'^2+p_i^2x_i'^2)+\frac{1}{64(M+N)}\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu'^2\geqq\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu'^2.$$

Aus (12.) und (13.) folgt $\xi_i'=x_i'=u_\mu'=v_\mu'=0$. Es fallen daher die Bewegungen τ_1 und τ_2 zusammen.

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

§ 14. Über die Werte der Konstanten des Integrals der lebendigen Kraft für verschiedene Bewegungen.

Wir wollen mit ϱ die kleinste der Zahlen p, q, 1 bezeichnen. Ferner seien $l, m, \sigma, \varepsilon$ positive Zahlen, welche den Bedingungen

$$m<1,\qquad \frac{2l^2}{1-m^2}<1-\varepsilon,\qquad \sigma<2q,\qquad \varepsilon<1$$

genügen. Wir wollen nun eine solche Umgebung (T) von $x=\xi=y=\eta=0$ ins Auge fassen, daß die ersten Differentialquotienten nach x, ξ, y, η von den X, Y in (T) absolut kleiner sind als

$$\frac{q}{\left(\frac{\sqrt{2M+N}}{\mathfrak{f}(l,m)}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)\left(\mathfrak{g}(l,m)\sqrt{M+N}+\sqrt{N}\right)};\qquad \frac{\sigma}{2\sqrt{N}\left(\frac{\sqrt{2M+N}}{\mathfrak{f}(l,m)}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{N}\right)}$$

und die zweiten Differentialquotienten von R (s. S. 203) nach x, ξ, y, η in (T) absolut kleiner als

$$\frac{\varrho^2}{M+N}\,\frac{1-\left(\frac{2l^2}{1-m^2}+\varepsilon\right)}{1+\left(\frac{2l^2}{1-m^2}+\varepsilon\right)}=r.$$

Bezüglich der Bedeutung von $\mathfrak{f}(l,m)$, $\mathfrak{g}(l,m)$, R vergleiche man § 5 und § 6.

Wir wollen nun Folgerungen entwickeln, die sich an die Annahme knüpfen, daß eine Bewegung für $t_0-\tau\leqq t\leqq t_0+\tau$, $\tau>0$ im Gebiete (T) bleibt und dabei die (gemäß S. 203 eingeführte) Konstante des Integrals der lebendigen Kraft gleich C ist.

Wir haben also für die genannte Bewegung

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N}(\eta_\mu^2-q_\mu^2y_\mu^2)+R=C$$

und hieraus

$$(1.)\qquad \sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu v_\mu+R=C.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}|R|&\leqq\frac{r}{2}\Big(\sum_{i=1}^{M}(|x_i|+|\xi_i|)+\sum_{\mu=1}^{N}(|y_\mu|+|\eta_\mu|)\Big)^2\\&\leqq\frac{r}{2\varrho^2}\Big[\sum_{i=1}^{N}(|\xi_i|+p_i|x_i|)+\sum_{\mu=1}^{N}(|\eta_\mu|+q_\mu|y_\mu|)\Big]^2.\end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter

$$|R|\leqq\frac{(M+N)r}{\varrho^2}\Big[\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N}\frac{u_\mu^2+v_\mu^2}{2}\Big].$$

Aus (1.) ergibt sich also

$$C\geqq\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)-\sum_{\mu=1}^{N}|u_\mu|\,|v_\mu|-\frac{(M+N)r}{\varrho^2}\Big[\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N}\frac{u_\mu^2+v_\mu^2}{2}\Big].$$

Da

$$\sum_{\mu=1}^{N}|u_\mu|\cdot|v_\mu|\leqq\sum_{\mu=1}^{N}\frac{u_\mu^2+v_\mu^2}{2},\qquad\frac{(M+N)r}{\varrho^2}<1,$$

erhält man hieraus

$$(2.)\qquad \sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)\leqq\frac{1+\frac{(M+N)r}{\varrho^2}}{1-\frac{(M+N)r}{\varrho^2}}\sum_{\mu=1}^{N}\frac{u_\mu^2+v_\mu^2}{2}+\frac{C}{1-\frac{M+N}{\varrho^2}r}.$$

Bezeichnen wir nun mit g die obere Grenze der Werte, welche

$$\Big|\sum_{\mu=1}^{N}u_\mu^2\Big|,\quad\Big|\sum_{\mu=1}^{N}v_\mu^2\Big|$$

für Stellen des Gebietes (T) annehmen können, so gilt nach § 6 für $t=t_0$

$$(3.)\qquad \sum_{\mu=1}^{N}(u_\mu^2+v_\mu^2)\leqq\frac{4l^2}{1-m^2}\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)+2ge^{-(2q-\sigma)r}.$$

Somit folgt aus (2.) für $t=t_0$

$$\left[1-\frac{2l^2}{1-m^2}\,\frac{1+\dfrac{(M+N)r}{\varrho^2}}{1-\dfrac{(M+N)r}{\varrho^2}}\right]\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)$$

$$\leqq\frac{1+\dfrac{(M+N)r}{\varrho^2}}{1-\dfrac{(M+N)r}{\varrho^2}}g\cdot e^{-(2q-\sigma)t}+\frac{C}{1-\dfrac{(M+N)}{\varrho^2}r}.$$

Nun ist nach der Definition von r

$$1-\frac{2l^2}{1-m^2}\,\frac{1+\dfrac{r(M+N)}{\varrho^2}}{1-\dfrac{r(M+N)}{\varrho^2}}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\dfrac{2l^2}{1-m^2}},$$

$$\frac{1+\dfrac{r(M+N)}{\varrho^2}}{1-\dfrac{r(M+N)}{\varrho^2}}=\frac{1}{\varepsilon+\dfrac{2l^2}{1-m^2}}.$$

Also ergibt die letzte Ungleichung für $t=t_0$

$$(4.)\qquad\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)\leqq\frac{g}{\varepsilon}e^{-(2q-\sigma)t}+\frac{C}{\varepsilon\left(1+\dfrac{M+N}{\varrho^2}r\right)}.$$

Berücksichtigt man nun noch (3.), so folgt für $t=t_0$

$$(5.)\qquad\sum_{\mu=1}^{N}(u_\mu^2+v_\mu^2)\leqq 2g\left(\frac{2l^2}{\varepsilon(1-m^2)}+1\right)e^{-(2q-\sigma)t}+\frac{4l^2}{1-m^2}\cdot\frac{C}{\varepsilon\left(1+\dfrac{M+N}{\varrho^2}r\right)}.$$

Wir werden nun aus den Ergebnissen dieses Paragraphen einige für uns wichtige Folgerungen ableiten.

Folgerung I. Liegt eine Bewegung für genügend große t in einem Gebiet (T), so muß die Konstante der lebendigen Kraft $C\geqq 0$ sein.

Wäre nämlich in einem solchen Falle $C<0$, so würde für genügend große t nach (4.) $\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)$ eine negative Größe sein.

Folgerung II. Liegt eine Bewegung immer in einem Gebiet (T) und ist für sie die Konstante des Integrals der lebendigen Kraft gleich Null, so gilt für die Bewegung stets $x=\xi=y=\eta=0$.

In der Tat, aus (4.) und (5.) folgt in diesem Fall, daß

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2\,x_i^2) \qquad \text{und} \qquad \sum_{\mu=1}^{N}(u_\mu^2+v_\mu^2)$$

stets kleiner sind, als eine beliebig gewählte positive Größe. Man hat also stets

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2\,x_i^2)=\sum_{\mu=1}^{N}(u_\mu^2+v_\mu^2)=0.$$

Unsere Behauptung ist also erwiesen.

Folgerung III. Liegt eine Bewegung für $t\gtreqless t_1$ *oder* $t\lesseqgtr t_1$ *in einem Gebiet* (T) *und ist dabei die Konstante des Integrals der lebendigen Kraft gleich Null, so nähert sich für* $t\to\infty$ *bezw.* $t\to-\infty$ *die Bewegung der Stelle* $x=\xi=y=\eta=0$ *in der Weise, daß die mit* $e^{\left(q-\frac{a}{2}\right)(t-t_1)}$ *multiplizierten Koordinaten* x, ξ, y, η *zwischen endlichen, für das Gebiet* (T) *ein für alle Mal wählbaren Grenzen bleiben. Ist* d *eine Konstante, die der Bedingung* $0<d<q$ *genügt, sonst beliebig gewählt ist, so streben die mit* $e^{d|t|}$ *multiplizierten Koordinaten nach Null.*

Der erste Teil dieses Satzes geht aus (4.) und (5.) unmittelbar hervor. Um den zweiten Teil zu beweisen, wählen wir eine Konstante d_1 gemäß der Bedingung $d<d_1<q$. Hierauf bestimmen wir eine Umgebung (T_1) von $x=\xi=y=\eta=0$ ähnlich wie vorhin (T), nur wählen wir an Stelle von σ den Wert $2q-2d_1$. Da eine Bewegung der vorausgesetzten Art der Stelle $x=\xi=y=\eta=0$ zustrebt, so liegt sie schließlich, etwa für $t\gtreqless t_2$ oder $t\lesseqgtr t_2$ in (T_1). Dann zeigen die (4.) und (5) analog gebildeten Ungleichungen, daß für $t>t_2$ oder $t<t_2$

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2\,x_i^2)\lesseqgtr\frac{g_1}{\varepsilon}\,e^{-2d_1|t-t_2|},$$

$$\sum_{\mu=1}^{N}(u_\mu^2+v_\mu^2)\lesseqgtr 2g_1\left(\frac{2\,l^2}{\varepsilon\,(1-m^2)}+1\right)e^{-2d_1|t-t_2|}$$

gilt. Hieraus schließt man sofort auf die Richtigkeit des zweiten Teiles unseres Satzes.

§ 15. Über Lösungen, die der Gleichgewichtslage zustreben.

I. $D>0$ sei so gewählt, daß das Gebiet

(1.) $$|\xi_i|,\ p_i|x_i|\lesseqgtr D, \qquad |\eta_\mu|,\ q_\mu|y_\mu|\lesseqgtr D$$

soweit die x, y in Frage kommen, innerhalb $(\mathfrak{T})$ (vergl. § 5) liegt und in

ihm die partiellen Differentialquotienten der X, Y nach den x, ξ, y, η absolut kleiner sind als

$$\frac{qT}{4(M+N)}.$$

Hierbei bedeutet T die kleinste der Zahlen p, 1, $\frac{2q}{1+q}$. Dann gilt folgender **Satz:**

Es sei $0 < d \leqq D$. *Jeder v-Stelle* (v) *des Gebietes* $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq d^2$ *entspricht eine und nur eine Bewegung, welche für einen vorgeschriebenen Zeitmoment* t_0 *die Stelle* (v) *als partielle Anfangsstelle liefert, für* $t \geqq t_0$ *in (1.) bleibt und für* $t \to \infty$ *der Stelle* $x = \xi = y = \eta = 0$ *zustrebt. Diese Bewegung bleibt für* $t \geqq t_0$ *in*

$$(2.) \qquad |\xi_i|,\ p_i|x_i| \leqq d, \qquad |\eta_\mu|,\ q_\mu|y_\mu| \leqq d.$$

Die mit $e^{\alpha t}$ *multiplizierten Koordinaten* x, ξ, y, η *streben für* $t \to \infty$ *nach Null, wenn* α *irgend eine positive Konstante* $< q$ *bedeutet.*

Zum Beweise gehen wir zunächst auf § 12 zurück und bemerken, daß die Gebiete (1.) und (2.) den daselbst für (J) genannten Bedingungen genügen, wenn $h = \frac{q}{2}$ gesetzt wird. Als Bewegung σ nehmen wir

$$x = \xi = y = \eta = 0.$$

Diese Bewegung bleibt in

$$|\xi_i|,\ p_i|x_i| \leqq D - D, \qquad |u_\mu|,\ |v_\mu| \leqq D - D$$

und in

$$|\xi_i|,\ p_i|x_i| \leqq d - d, \qquad |u_\mu|,\ |v_\mu| \leqq d - d,$$

welche Gebiete K entsprechen. Der Satz am Anfang des § 12 zeigt nun, daß eine Bewegung existiert, welche für $t = t_0$ die Stelle (v) liefert, für $t \geqq t_0$ in (2.) bleibt und für $t \to \infty$ der Stelle $x = \xi = y = \eta = 0$ so zustrebt, daß die mit $e^{\frac{q}{2}t}$ multiplizierten Koordinaten x, ξ, y, η zwischen endlichen Grenzen bleiben. Derselbe Satz lehrt auch, daß diese Bewegung die einzige ist, die für $t \geqq t_0$ in (1.) bleibt, für $t = t_0$ (v) liefert und für $t \to \infty$ der Stelle

$$x = \xi = y = \eta = 0$$

so zustrebt, daß die mit $e^{\frac{q}{2}t}$ multiplizierten Koordinaten absolut unter einer endlichen Grenze bleiben. Kann nun außer der genannten Bewegung eine andere existieren, die für $t = t_0$ die Stelle (v) liefert, für $t \geqq t_0$ in (1.) bleibt

und für $t \to \infty$ der Stelle $x = \xi = y = \eta = 0$ zustrebt? Eine solche Bewegung müßte mit der Zeit in jede noch so klein gewählte Umgebung von

$$x = \xi = y = \eta = 0$$

eintreten und die Konstante des Integrals der lebendigen Kraft wäre gleich Null. Somit kommt schließlich der Satz § 14, III zur Anwendung. Es streben daher die mit e^{at} multiplizierten Koordinaten nach 0, wenn α irgend eine Konstante ist, die der Bedingung $0 < \alpha < q$ genügt. Somit bleiben die mit $e^{\frac{q}{2}t}$ multiplizierten Koordinaten für $t \geqq t_0$ absolut unter einer endlichen Grenze. Wir haben aber eben gesehen, daß die vorher erwähnte Bewegung die einzige ist, welche allen diesen Bedingungen genügt. Somit ist die oben aufgeworfene Frage in verneinendem Sinne zu beantworten. Daß die betrachtete Bewegung sich der Stelle $x = \xi = y = \eta = 0$ so nähert, daß die mit e^{at} multiplizierten Koordinaten nach 0 streben, geht aus den eben gemachten Bemerkungen unmittelbar hervor. Somit ist unser Satz bewiesen.

Durch unseren Satz sind jeder v-Stelle des Gebietes $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq D^2$ Größen x_i, ξ_i, u_i eindeutig zugeordnet. Man kann daher in gewissem Sinne die letzteren als im Gebiete $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq D^2$ definierte Funktionen ansehen. Diese sind nichts anderes als die am Schluß des § 12 eingeführten Funktionen $(x), (\xi), (u)$ für den besonderen Fall, wo $h = \frac{q}{2}$, $H = D$ und das Gebiet (1.) die Rolle von (J), die Bewegung $x = \xi = y = \eta = 0$ die Rolle von σ spielt. *Die in Rede stehenden Funktionen sind nach* § 12 *im Gebiet* $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq D^2$ *stetig.*

II. Es möge nunmehr irgend eine Bewegung vorliegen, die der Stelle $x = \xi = y = \eta = 0$ für $t \to \infty$ zustrebt. Wir wählen eine Zahl $0 < \alpha < q$ und zwei positive Zahlen l und m. Hierauf bestimmen wir nach § 6, II zu l, m und $h = \alpha$ eine Umgebung (C). Für genügend große t wird die betrachtete Bewegung in (C) liegen und

$$e^{2\alpha t}\left[l^2 \sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2) + m^2 \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2 - \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2\right]$$

wird für $t \to \infty$ nicht nach ∞ konvergieren. Wir können daher den am Schluß des § 6 formulierten Satz auf die betrachtete Bewegung und die Bewegung $x = \xi = y = \eta = 0$ anwenden. Es gilt daher für genügend große t

$$l^2 \sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2) + m^2 \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2 < \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2,$$

falls, wie wir voraussetzen wollen, die gegebene Bewegung nicht mit der Bewegung $x=\xi=y=\eta=0$ *zusammenfällt.* Somit ist für genügend große t *niemals* $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2=0$ und es gilt

$$\operatorname{Lim}_{t\to\infty}\frac{\xi_i}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2}}=\operatorname{Lim}_{t\to\infty}\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2}}=\operatorname{Lim}_{t\to\infty}\frac{u_\mu}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2}}=0.$$

Letzteres folgt daraus, daß die positiven Zahlen l und m beliebig gewählt werden durften.

Offenbar gilt ferner für $t\to\infty$

$$\frac{\sum_{\mu=1}^{N}(v_\mu-u_\mu)^2}{\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2}\to 1, \qquad \frac{\sum_{\mu=1}^{N}(v_\mu+u_\mu)^2}{\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2}\to 1,$$

also

$$\frac{\sum_{\mu=1}^{N} q_\mu^2 y_\mu^2}{\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2}\to\frac{1}{4}, \qquad \frac{\sum_{\mu=1}^{N}\eta_\mu^2}{\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2}\to\frac{1}{4}.$$

Man kann daher in den oben (Zeile 4) stehenden Gleichungen die Nenner durch $\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N}\eta_\mu^2}$ oder $\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} q_\mu^2 y_\mu^2}$ ersetzen, ohne die Gültigkeit aufzuheben. Die eben genannten zwei Größen verschwinden natürlich für genügend große t nicht.

§ 16. Über Lösungen, welche der Gleichgewichtslage zustreben. (Fortsetzung.)

Bei den Untersuchungen dieses Paragraphen wollen wir die *Annahme machen, daß nicht alle q-Größen unter einander gleich sind.* Unter dieser Annahme wollen wir eine Bewegung ins Auge fassen, die der Stelle $x=\xi=y=\eta=0$ zustrebt, ohne daß dabei stets $x=\xi=y=\eta=0$ ist. Wir wissen, daß für genügend große t hierbei die v-Größen nicht gleichzeitig verschwinden. Wir schließen ferner aus dem gegen Ende des vorigen Paragraphen Gesagten, daß man für genügend große t setzen kann

$$(1.)\qquad \sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+x_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2\leqq K\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2,$$

wobei K eine positive Konstante ist.

Nunmehr denken wir uns die v-Größen irgend wie derart in zwei Gruppen geteilt, daß die den v-Größen der Gruppe I entsprechenden q-Größen kleiner sind, als die den v-Größen der Gruppe II entsprechenden q. Die Summe der Quadrate der v der Gruppe I, gebildet für die gegebene Bewegung, wollen wir mit ω_1 bezeichnen. ω_2 habe die entsprechende Bedeutung für die Gruppe II. Weiter sei r_1 der größte q-Wert für Gruppe I, r_2 der kleinste q-Wert für Gruppe II. Wie auch eine Umgebung von $x=\xi=y=\eta=0$ gewählt sein möge, schließlich bleibt die betrachtete Bewegung in dieser Umgebung. Beachtet man diese Tatsache, erinnert sich ferner an (1.) und zieht endlich die Gleichungen

$$\frac{dv_\mu^2}{dt} = -2q_\mu v_\mu^2 + 2v_\mu Y_\mu$$

in § 5 heran, so erkennt man die Berechtigung folgender Aussage: Für genügend große t gilt

$$(2.)\qquad \begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} \leqq -2r_1\omega_1 - \gamma(\omega_1+\omega_2), \\ \frac{d\omega_2}{dt} \leqq -2r_2\omega_2 + \gamma(\omega_1+\omega_2), \\ \omega_1 \geqq 0,\ \omega_2 \geqq 0,\ \omega_1+\omega_2 > 0, \end{cases}$$

wobei γ eine Funktion von t ist, die für $t\to\infty$ nach 0 strebt.

Wir wollen setzen

$$\sigma = \frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2}, \qquad 1-\sigma = \frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2}, \qquad 0 \leqq \sigma \leqq 1.$$

Es ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\omega_2\frac{d\omega_1}{dt} - \omega_1\frac{d\omega_2}{dt}}{(\omega_1+\omega_2)^2} \geqq \frac{\omega_2[-2r_1\omega_1 - \gamma(\omega_1+\omega_2)] + \omega_1[2r_2\omega_2 - \gamma(\omega_1+\omega_2)]}{(\omega_1+\omega_2)^2}$$
$$= 2(r_2-r_1)\sigma(1-\sigma) - \gamma;$$

also haben wir

$$(3.)\qquad \frac{d\sigma}{dt} \geqq 2(r_2-r_1)\sigma(1-\sigma) - \gamma.$$

Wir wissen, daß $r_1 < r_2$ und $\gamma \to 0$ für $t\to\infty$. Nunmehr wählen wir eine Konstante ε gemäß der Bedingung $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, sonst beliebig. Für genügend große t gilt $\gamma < (r_2-r_1)\varepsilon(1-\varepsilon)$. Es sei dies für $t > t_0$ der Fall. Wir

wollen nun Folgerungen entwickeln, die sich ergeben, wenn einmal für $t > t_0$ $\varepsilon \leqq \sigma \leqq 1-\varepsilon$ gilt. Dann ist, wie leicht zu sehen, $\sigma(1-\sigma) \geqq \varepsilon(1-\varepsilon)$ und folglich für den betrachteten Moment

$$\frac{d\sigma}{dt} \geqq (r_2 - r_1)\,\varepsilon(1-\varepsilon).$$

Also wird σ, wie leicht zu sehen, nach einer gewissen Zeit gleich $1-\varepsilon$ und hierauf stets größer als $1-\varepsilon$ sein.

Indem wir nach dieser kleinen Abschweifung zu unserem Gegenstande zurückkehren, erkennen wir nunmehr, daß es überhaupt nur zwei Möglichkeiten gibt: Entweder wird für genügend große t schließlich immer $\sigma > 1-\varepsilon$ gelten, oder es wird für genügend große t schließlich immer $\sigma < \varepsilon$ gelten. Dieses Resultat lehrt (wenn wir bedenken, daß ε nur der Bedingung $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ unterworfen war), *daß für* $t \to \infty$ *entweder* $\sigma \to 0$ *oder* $\sigma \to 1$ gilt. Somit haben wir bewiesen: *Für* $t \to \infty$ *konvergiert eine der beiden Größen* $\frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2}$ *und* $\frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2}$ *nach* 0, *die andere nach* 1.

Um dieses Ergebnis zu verwerten, wollen wir nunmehr die v-Größen derart in Gruppen teilen, daß die v mit gleicher q-Größe in einer Gruppe vereinigt werden. Es mögen im Ganzen m Gruppen entstehen. Wir bezeichnen die Summe der Quadrate der zu einer Gruppe gehörigen v mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$, wobei den wachsenden Indizes wachsende q entsprechen mögen. $\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m$ bezeichnen wir mit ω.

Von den Größen

$$\frac{\varrho_1}{\omega}, \quad \frac{\varrho_1+\varrho_2}{\omega}, \quad \frac{\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3}{\omega}, \ldots \quad \frac{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_m}{\omega}$$

strebt für $t \to \infty$ nach dem Vorigen jede entweder nach 0 oder nach 1. Da die letzte Größe immer $=1$ ist, so gibt es eine bestimmte erste Größe dieser Reihe, welche nach 1 strebt. Es sei dies die λ-te Größe. Ist $\lambda = 1$, so haben wir für $t \to \infty$

$$\frac{\varrho_1}{\omega} \to 1, \qquad \frac{\varrho_2+\varrho_3+\cdots+\varrho_m}{\omega} \to 0,$$

woraus in unserem Fall offenbar folgt

$$\frac{\varrho_2}{\omega} \to 0, \qquad \frac{\varrho_3}{\omega} \to 0, \ \ldots \qquad \frac{\varrho_m}{\omega} \to 0.$$

Ist $\lambda = m$, so haben wir für $t \to \infty$

$$\frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{m-1}}{\omega} \to 0, \qquad \frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m}{\omega} \to 1.$$

Also ergibt sich dann

$$\frac{\varrho_1}{\omega} \to 0, \ \frac{\varrho_2}{\omega} \to 0, \ \ldots \qquad \frac{\varrho_{m-1}}{\omega} \to 0, \ \frac{\varrho_m}{\omega} \to 1.$$

Ist $1 < \lambda < m$, so haben wir

$$\frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{\lambda-1}}{\omega} \to 0, \qquad \frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_\lambda}{\omega} \to 1,$$

$$\frac{\varrho_{\lambda+1} + \varrho_{\lambda+2} + \cdots + \varrho_m}{\omega} \to 0$$

und folglich

$$\frac{\varrho_1}{\omega} \to 0, \ \frac{\varrho_2}{\omega} \to 0, \ \ldots \qquad \frac{\varrho_{\lambda-1}}{\omega} \to 0, \ \frac{\varrho_\lambda}{\omega} \to 1, \ \frac{\varrho_{\lambda+1}}{\omega} \to 0, \ \ldots \qquad \frac{\varrho_m}{\omega} \to 0.$$

Somit gibt es immer einen solchen Index λ, daß für $t \to \infty$

$$\frac{\varrho_\lambda}{\omega} \to 1, \qquad \frac{\varrho_\vartheta}{\omega} \to 0$$

gilt, wenn $\vartheta \gtrless \lambda$. ϱ_λ verschwindet für genügend große t nicht, und man hat, sobald $\vartheta \gtrless \lambda$, für $t \to \infty$

$$\frac{\varrho_\vartheta}{\varrho_\lambda} \to 0, \qquad \frac{\sum_{i=1}^{M}(x_i^2 + \xi_i^2) + \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2}{\varrho_\lambda} \to 0.$$

Es sei, um ausführlicher zu schreiben,

$$\varrho_\lambda = v_\alpha^2 + v_\beta^2 + \cdots + v_\gamma^2,$$

wobei $v_\alpha, v_\beta, \ldots v_\gamma$ alle einem und demselben q-Wert entsprechen, den wir mit k bezeichnen. Offenbar gilt für $t \to \infty$

$$\frac{(v_\alpha \pm u_\alpha)^2 + (v_\beta \pm u_\beta)^2 + \cdots + (v_\gamma \pm u_\gamma)^2}{v_\alpha^2 + v_\beta^2 + \cdots + v_\gamma^2} \to 1.$$

Also ist für $t \to \infty$

$$\frac{\eta_\alpha^2 + \eta_\beta^2 + \cdots + \eta_\gamma^2}{v_\alpha^2 + v_\beta^2 + \cdots + v_\gamma^2} \to \frac{1}{4}, \qquad \frac{y_\alpha^2 + y_\beta^2 + \cdots + y_\gamma^2}{v_\alpha^2 + v_\beta^2 + \cdots + v_\gamma^2} \to \frac{1}{4k^2},$$

$$\frac{x_i^2}{v_\alpha^2+v_\beta^2+\cdots+v_\gamma^2}\to 0\,,\qquad \frac{\xi_i^2}{v_\alpha^2+v_\beta^2+\cdots+v_\gamma^2}\to 0\,,$$

$$\frac{\eta_i^2}{v_\alpha^2+v_\beta^2+\cdots+v_\gamma^2}\to 0\,,\qquad \frac{y_\tau^2}{v_\alpha^2+v_\beta^2+\cdots+v_\gamma^2}\to 0\,,$$

wenn τ keiner der Indizes $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ ist. In der letzten Reihe können wir die Nenner auch durch $\eta_\alpha^2+\eta_\beta^2+\cdots+\eta_\gamma^2$ oder $y_\alpha^2+y_\beta^2+\cdots+y_\gamma^2$ ersetzen, ohne die Richtigkeit aufzuheben. Wir haben auch für $t\to\infty$

$$\frac{\eta_\alpha^2+\eta_\beta^2+\cdots+\eta_\gamma^2}{y_\alpha^2+y_\beta^2+\cdots+y_\gamma^2}\to k^2.$$

Wir wollen zuletzt noch unsere Aufmerksamkeit auf den Fall lenken, wo alle q unter einander verschieden sind.

In diesem Fall gibt es nach dem Obigen einen solchen Index λ, daß für $t\to\infty$

$$\operatorname{Lim}\frac{x_i}{y_\lambda}=\operatorname{Lim}\frac{\xi_i}{y_\lambda}=\operatorname{Lim}\frac{\eta_\tau}{y_\lambda}=\operatorname{Lim}\frac{y_\tau}{y_\lambda}=0,$$

wenn $\tau\gtrless\lambda$. Die Nenner können auch durch η_λ ersetzt werden, ohne die Richtigkeit aufzuheben.

Wir haben ferner $\operatorname{Lim}\limits_{t\to\infty}\frac{\eta_\lambda^2}{y_\lambda^2}=q_\lambda^2$. Bedenkt man die Stetigkeit von $\frac{\eta_\lambda}{y_\lambda}$, so folgt, *daß man entweder* $\operatorname{Lim}\limits_{t\to\infty}\frac{\eta_\lambda}{y_\lambda}=+q_\lambda$ *oder* $\operatorname{Lim}\limits_{t\to\infty}\frac{\eta_\lambda}{y_\lambda}=-q_\lambda$ *hat.*

Kapitel III.

§ 17. Ein Hilfssatz.

In diesem Kapitel wollen wir die in § 5, S. 202 angegebene spezielle Form der Ω_i in weiterem Umfang als bisher benutzen und auf diese Weise zunächst einen Hilfssatz ableiten. Wir wollen wieder, wie schon in § 5, an Stelle von $x_1, x_2, \ldots x_M, y_1, \ldots y_N$ die Bezeichnung $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ anwenden und an Stelle von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_M, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N$ den $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ entsprechend $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ schreiben. Offenbar kann man nunmehr drei nur von den Anfangsdaten abhängige Zahlen $S>0$, $P>0$, $Q>0$ derart angeben, daß Folgendes gilt:

1. Das Gebiet $|\omega_i|\leqq S$ $(i=1, 2, \ldots n)$ liegt ganz im Gebiete $(\mathfrak{T})$ (vgl. § 5, S. 203).

2. Ist $0<D\leqq S$ und $|\omega_i|<D$ $(i=1,2,\dots n)$, so gilt

$$\left|\frac{d\lambda_i}{dt}\right|<P\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2+QD. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

Es bedeute nun D eine Zahl, welche den Bedingungen

$$D>0, \qquad D\leqq S, \qquad D<\frac{1}{8nP}$$

genügt. *Wir wollen Folgerungen ableiten, die sich an die Annahme knüpfen, daß eine Bewegung für $t\geqq T$ im Gebiet (Ω), d. h. $|\omega_i|<D$ bleibt. Wir behaupten, daß unter dieser Annahme für alle $t\geqq T$*

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2<8nQD^2$$

gilt.

Um dies zu beweisen, nehmen wir versuchsweise an, daß für $t=t_1\geqq T$ die Behauptung unrichtig sei, sodaß also

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i1}^2\geqq 8nQD^2$$

gilt, wobei λ_{i1} die Größe λ_i für $t=t_1$ bedeutet. Wir wählen nun von den λ_{i1} eine Größe λ_{a1} so aus, daß $|\lambda_{a1}|\geqq|\lambda_{i1}|$ $(i=1,2,\dots n)$. Dann ist $|\lambda_{a1}|=|\omega'_{a1}|>0$. (Der Gebrauch der Indizes, welche auf entsprechende Zeitmomente deuten, wird wohl ohne weiteres klar sein). Wir setzen jetzt $\tau=t_1+\frac{4D}{|\omega'_{a1}|}$. Dann haben wir

$$\omega_{a\tau}=\omega_{a1}+\omega'_{a1}\cdot\frac{4D}{|\omega'_{a1}|}+\omega''_{a\mu}\cdot\frac{8D^2}{|\omega'_{a1}|^2}.$$

Hierbei deutet der Index μ auf einen t-Wert zwischen t_1 und τ. Somit ergibt sich

$$|\omega''_{a\mu}|=\frac{\left|\omega_{a\tau}-\omega_{a1}-\omega'_{a1}\cdot\frac{4D}{|\omega'_{a1}|}\right|}{8D^2}\cdot|\omega'_{a1}|^2\geqq\frac{|\omega'_{a1}|^2}{8D^2}(4D-|\omega_{a\tau}-\omega_{a1}|).$$

Nun ist aber $|\omega_{a\tau}-\omega_{a1}|$ nach der Voraussetzung $<2D$. Somit haben wir

$$|\omega''_{a\mu}|>\frac{|\omega'_{a1}|^2}{4D}, \qquad \omega''_{a\mu}=\lambda'_{a\mu}.$$

Berücksichtigt man nun die oben, Z. 2, stehende Ungleichung, so erhält man

$$P\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i\mu}^2+Q\cdot D>|\lambda'_{\alpha\mu}|>\frac{|\omega'_{\alpha 1}|^2}{4D}=\frac{|\lambda_{\alpha 1}|^2}{4D}\geqq\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i1}^2}{4nD}.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i\mu}^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i1}^2>\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i1}^2\cdot\left(\frac{1-4nPD}{4nPD}\right)-\frac{QD}{P}.$$

Wegen $D<\frac{1}{8nP}$ ist der Koeffizient von $\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i1}^2$ rechts >0. Berücksichtigt man nun noch $\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i1}^2\geqq 8nQD^2$ (vergl. S. 250), so sieht man, daß die ganze rechte Seite $\geqq\frac{QD}{P}(1-8nPD)$ ist. Also haben wir

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i\mu}^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i1}^2>\frac{QD}{P}(1-8nPD).$$

Wegen $D<\frac{1}{8nP}$ ist $1-8nPD>0$. Wir haben also

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i\mu}^2>\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i1}^2\geqq 8nQD^2.$$

Somit können wir die vorhergehenden Betrachtungen wiederholen, indem wir nicht von $t=t_1$, sondern von $t=t_\mu$ ausgehen. Wir weisen dann die Existenz eines solchen t-Wertes $t_\nu>t_\mu$ nach, daß

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i\nu}^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i\mu}^2>\frac{QD}{P}(1-8nPD).$$

So fortfahrend erkennen wir, daß t-Werte $t_\mu<t_\nu<t_\varrho\ldots$ größer als T angegeben werden können, für die $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ nach „Unendlich“ konvergiert. Daß dies nicht möglich ist, wird im vorliegenden Fall einfach mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft bewiesen. In der Tat, für die betrachtete Bewegung lehrt dieses Integral, daß die lebendige Kraft T für $t\geqq T$ innerhalb endlicher Grenzen liegt. Sobald nicht alle ω' verschwinden, haben wir

$$T=\sum_{rs}B_{rs}\omega'_r\omega'_s=\sum_{i=1}^{n}\omega_i'^2\left[\sum_{rs}B_{rs}\frac{\omega'_r}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\omega_i'^2}}\cdot\frac{\omega'_s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\omega_i'^2}}\right].$$

Setzen wir der Reihe nach $t=t_1, t_\mu, t_\nu, \ldots$, so müßte hiernach

$$\sum_{rs}B_{rs}\frac{\omega'_r}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\omega_i'^2}}\cdot\frac{\omega'_s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\omega_i'^2}}\to 0$$

gelten. Das System

$$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n, \qquad \frac{\omega_1'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i'^2}}, \quad \frac{\omega_2'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i'^2}}, \quad \dots \quad \frac{\omega_n'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i'^2}},$$

gebildet für $t = t_1, t_\mu, t_\nu, \dots$, besitzt wegen

$$|\omega_i| < D, \qquad \left| \frac{\omega_i'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i'^2}} \right| \leqq 1$$

mindestens eine Häufungsstelle im Gebiete

$$|\omega_i| \leqq D, \qquad \left| \frac{\omega_i'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i'^2}} \right| \leqq 1.$$

Man kann daher aus den $t_1, t_\mu, t_\nu, \dots$ eine Reihe $t', t'', t''', \dots$ so auswählen, daß

$$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n, \qquad \frac{\omega_i'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i'^2}}, \dots \quad \frac{\omega_n'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i'^2}}$$

für die genannten t-Werte nach einer Stelle

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \qquad \beta_1, \dots \beta_n$$

konvergiert, wobei $|\alpha_i| \leqq D$, $|\beta_i| \leqq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 = 1$. Wegen der Stetigkeit der B_{rs} gilt dabei

$$\sum_{rs} B_{rs} \frac{\omega_r'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i'^2}} \frac{\omega_s'}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i'^2}} \to \sum_{rs} [B_{rs}] \beta_r \cdot \beta_s,$$

wobei $[B_{rs}]$ den Wert von B_{rs} für $\omega_i = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots n)$ bedeutet. Diese Grenze ist aber, wie wir schon wissen, gleich 0. Also ist T gleich 0 für

$$\omega_i = \alpha_i, \qquad \omega_i' = \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

obgleich nicht alle β_i verschwinden. Dies ist, wie wir wissen, nicht der Fall. Somit hat die versuchsweise S. 250 gemachte Annahme, unsere Behauptung sei unrichtig, zu einem Widerspruch geführt. Die Richtigkeit unserer Behauptung ist also erwiesen.

§ 18. Über Bewegungen, welche für einen einseitig oder beiderseitig unbeschränkten Zeitraum in der Nähe der Stelle $x_i = y_\mu = 0$ bleiben.

Es mögen zwei Bewegungen für $t \overline{\overline{>}} \tau$ in (H) liegen. (Bezüglich (H) vgl. den Anfang von § 8 und § 10). *Für $t = t_0 \overline{\overline{>}} \tau$ mögen die x, ξ, y zusammenfallen.* Für $t = t_0$ ist dann (bei einer Bezeichnungsweise wie in § 6) $x' = \xi' = 0 \qquad u'_\mu = v'_\mu$.

Wäre für $t = t_0$ $\sum_{\mu=1}^{N} u'^2_\mu \neq 0$, so müßte (nach § 6, 1 mit Benutzung einer mehrfach vorgekommenen Schlußweise) für $t = t_0$

$$\lambda^2 \sum_{\mu=1}^{N} v'^2_\mu > \sum_{\mu=1}^{N} u'^2_\mu$$

gelten. (Bezüglich $0 < \lambda < 1$ siehe den Anfang von § 10.) Dies widerspricht dem Vorigen. Also gilt für $t = t_0$ $\sum_{\mu=1}^{N} u'^2_\mu = 0$ und daher $u'_\mu = v'_\mu = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots N)$. *Somit fallen unter den genannten Bedingungen beide Bewegungen zusammen.*

Nunmehr seien l, m *positive* Zahlen, welche der Bedingung $l^2 + m^2 < \frac{1}{N}$ genügen. Dann ist $1 - \sqrt{N}\sqrt{l^2 + m^2} > 0$. Wir bestimmen eine Umgebung (Ω) von $x = \xi = y = \eta = 0$, welche den Größen l, m so entspricht, wie es am Schluß von § 6, I erklärt wurde.

$d > 0$ sei eine Zahl, welche den früher (am Anfang des § 8) angegebenen Bedingungen entspricht; außerdem möge das Gebiet

$$p\,|x|, |\xi| \overline{\overline{<}} d, \qquad |u|, |v| \overline{\overline{<}} \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

in (Ω) liegen. Für das Gebiet

$$(\Pi) \qquad p\,|x|, |\xi| \overline{\overline{<}} \frac{d}{3\sqrt{M}}, \qquad |v| \overline{\overline{<}} \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

haben wir am Schluß des § 10 eindeutige und stetige Funktionen von x, ξ, v

$$[u_1], [u_2], \ldots [u_N]$$

eingeführt. Dabei gilt $|[u]| \overline{\overline{<}} \frac{d}{2\sqrt{N}}$, und wir wissen, daß ein System x, ξ, v aus (Π) und die zugehörigen $[u_1], [u_2], \ldots [u_N]$ eine Stelle geben, die, als Anfangsstelle genommen, eine für wachsende t im Gebiete

$$p|x|,\ |\xi| \overline{\leqq} d, \qquad |u|,\ |v| \overline{\leqq} \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

bleibende Lösung gibt.

Es sei nun $y_{10}, y_{20}, \ldots y_{N0}$ ein System von $y_1, y_2, \ldots y_N$-Werten, das dem Gebiet

$$q_\mu |y_\mu| \overline{\leqq} \frac{1-\sqrt{N}\sqrt{l^2+m^2}}{2} \cdot \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

entnommen ist. Wir bilden die Funktionen

$$[u_\mu] - v_\mu - 2 q_\mu y_{\mu 0} = \varphi_\mu (x, \xi, v). \qquad (\mu = 1, 2, \ldots N)$$

Dieselben sind im Gebiet (Π) definiert und stetig. Wir behaupten: *Wählt man x, ξ fest der Bedingung $p|x|, |\xi| \overline{\leqq} \frac{d}{3\sqrt{M}}$ gemäß, so kann man die $v_1, v_2, \ldots v_N$ gemäß der Bedingung $|v| \overline{\leqq} \frac{d}{2\sqrt{N}}$ so bestimmen, daß alle φ_μ gleichzeitig verschwinden.*

In der Tat, andernfalls würden die φ_μ (die jetzt Funktionen von $v_1, v_2, \ldots v_N$ allein sind) stetige Funktionen von $v_1, v_2, \ldots v_N$ darstellen, die im Gebiete $|v| \overline{\leqq} \frac{d}{2\sqrt{N}}$ niemals gleichzeitig verschwinden. Der Satz § 4, II lehrt dann, daß es auf dem Rande des Gebietes $|v| \overline{\leqq} \frac{d}{2\sqrt{N}}$ mindestens eine v-Stelle geben muß, für welche $\varphi_\mu (x, \xi, v) = p_0 \cdot v_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots N)$, $p_0 > 0$ gilt. Für diese v-Stelle hätten wir also

$$[u_\mu] - 2 q_\mu y_{\mu 0} = (1 + p_0)\, v_\mu . \qquad (\mu = 1, 2, \ldots N)$$

Da die v-Stelle auf dem Rande von $|v| \overline{\leqq} \frac{d}{2\sqrt{N}}$ liegt, so gibt es dann einen solchen Index ϱ, daß

$$|[u_\varrho] - 2 q_\varrho y_{\varrho 0}| = (1 + p_0) \frac{d}{2\sqrt{N}},$$

also

$$(1 + p_0) \frac{d}{2\sqrt{N}} \overline{\leqq} |[u_\varrho]| + 2 q_\varrho |y_{\varrho 0}|,$$

$$\frac{d}{2\sqrt{N}} < |[u_\varrho]| + 2 q_\varrho |y_{\varrho 0}| \overline{\leqq} |[u_\varrho]| + (1 - \sqrt{N}\sqrt{l^2+m^2}) \cdot \frac{d}{2\sqrt{N}},$$

$$|[u_\varrho]| > \sqrt{l^2+m^2} \cdot \frac{d}{2}.$$

Wir nehmen die festgewählten x, ξ, die eben besprochene v-Stelle und die zugehörigen $[u_1], [u_2], \dots [u_N]$ als Anfangsstelle (x, ξ, v, u) und erhalten eine Bewegung, die für wachsende t in

$$p|x|,\ |\xi| \leqq d, \qquad |u|,\ |v| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

bleibt. Nach der Voraussetzung bleibt die Bewegung auch in (Ω). Für den Anfangsmoment ist $\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2 > 0$ wegen $|[u_\varrho]| > \sqrt{l^2+m^2}\cdot\frac{d}{2}$. Also muß (nach einer oft benutzten Schlußweise, die sich auf § 6, 3 stützt) für den Anfangsmoment

$$l^2 \sum_{i=1}^{M} (\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2) + m^2 \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 > \sum_{\mu=1}^{N} [u_\mu]^2$$

sein. Hieraus folgt für diesen Moment

$$\frac{2l^2 d^2}{9} + m^2 \frac{d^2}{4} > [u_\varrho]^2 > (l^2+m^2)\frac{d^2}{4}.$$

Aber dies stellt einen Widerspruch dar. Somit müssen wir unsere versuchsweise gemachte Annahme aufgeben. Unsere Behauptung ist also erwiesen.

Wir wollen die Elemente einer v-Stelle, für welche alle φ_μ verschwinden, mit $v_{10}, v_{20}, \dots v_{N0}$ bezeichnen. Die zugehörigen $[u_1], [u_2], \dots [u_N]$ seien $[u_1]_0, [u_2]_0, \dots [u_N]_0$. Wir wählen die festgewählten x, ξ, die $v_{10}, v_{20}, \dots v_{N0}$ und $[u_1]_0, [u_2]_0, \dots [u_N]_0$ als Anfangsstelle und erhalten dann eine Bewegung, welche für wachsende t in

$$p\,|x|,\ |\xi| \leqq d, \qquad |u|,\ |v| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

bleibt; dabei gilt auch

$$q_\mu\,|y_\mu| = \frac{|u_\mu - v_\mu|}{2} \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}, \qquad |\eta_\mu| = \frac{|u_\mu + v_\mu|}{2} \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}.$$

Für den Anfangsmoment haben wir für diese Bewegung die festgewählten x, ξ-Koordinaten, außerdem für den Anfangsmoment

$$q_\mu\, y_\mu = \frac{[u_\mu]_0 - v_{\mu 0}}{2} = \frac{2 q_\mu y_{\mu 0}}{2} = q_\mu y_{\mu 0}, \qquad (\mu = 1, 2, \dots N)$$

also für den Anfangsmoment

$$y_\mu = y_{\mu 0}. \qquad (\mu = 1, 2, \dots N)$$

Wir haben somit folgenden Satz gefunden:

Wählt man ein System x_{i0}, ξ_{i0} *aus dem Gebiete* $p|x|, |\xi| \leqq \frac{d}{3\sqrt{M}}$ *und ein System* $y_{\mu 0}$ *aus dem Gebiete*

$$q_\mu |y_\mu| \leqq \frac{1-\sqrt{N}\sqrt{l^2+m^2}}{2} \cdot \frac{d}{2\sqrt{N}},$$

so kann man eine Bewegung finden, welche für einen willkürlich gewählten Anfangsmoment $t=T$ $x_i = x_{i0}$, $\xi_i = \xi_{i0}$, $y_\mu = y_{\mu 0}$ *liefert und für* $t \geqq T$ *im Gebiete*

$$p|x|, |\xi| \leqq d, \qquad |u|, |v| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}$$

bleibt. Für diese Zeiten gilt auch

$$|\eta_\mu|, q_\mu |y_\mu| \leqq \frac{d}{2\sqrt{N}}.$$

Wir setzen

$$g = \frac{2pq\sqrt{N}}{p+2q\sqrt{N}}, \qquad h = \frac{1-\sqrt{N}\sqrt{l^2+m^2}}{2}.$$

Δ sei eine Zahl, die folgenden Bedingungen genügt:

$$\Delta > 0, \qquad \Delta \leqq S, \qquad \Delta < \frac{1}{8nP}.$$

Das Gebiet $|x|, |y| < \Delta, \sum_{i=1}^{M} \xi_i^2 + \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu^2 < 8nQ\Delta^2$ **liegt in** (H). $g\Delta$ **genügt den in diesem Paragraphen für** d **aufgestellten Bedingungen. (Bezüglich** S, P, Q **vergl. § 17.)**

Wir beweisen folgenden Satz: *Ist* $0 < \delta \leqq \Delta$, *so kann zu jedem* x, ξ, y*-System des Gebietes*

$$p_i |x_i|, |\xi_i| \leqq \frac{g}{3\sqrt{M}}\delta, \qquad q_\mu |y_\mu| \leqq \frac{h.g}{2\sqrt{N}} \cdot \delta$$

eine und nur eine Bewegung gefunden werden, welche für einen gegebenen Anfangsmoment $t=t_0$ *die genannte Stelle liefert und für* $t \geqq t_0$ *im Gebiete* $|x|, |y| < \Delta$ *bleibt. Für diese Bewegung gilt für* $t \geqq t_0$

$$p_i|x_i|, |\xi_i| \leqq g \cdot \delta, \qquad |u_\mu|, |v_\mu| \leqq \frac{g}{2\sqrt{N}} \cdot \delta,$$

$$|\eta_\mu|, q_\mu |y_\mu| \leqq \frac{g}{2\sqrt{N}} \cdot \delta.$$

In der Tat, da $g\cdot\Delta$ den in diesem Paragraphen für d angegebenen Bedingungen genügt, so gilt das gleiche auch von $g\cdot\delta$. Somit folgt aus den Ergebnissen dieses Paragraphen sofort, daß man eine Bewegung finden kann, die für $t=t_0$ die gewählte Stelle liefert und für $t\gtreqless t_0$ im Gebiete

$$p_i|x_i|,\ |\xi_i|\lesseqgtr g\delta, \qquad |u_\mu|,\ |v_\mu|\lesseqgtr\frac{g\cdot\delta}{2\sqrt{N}}$$

bleibt, wobei für die genannten Zeiten auch

$$|\eta_\mu|,\ q_\mu|y_\mu|\lesseqgtr\frac{g\cdot\delta}{2\sqrt{N}}$$

gilt. Nun ist aber $g\delta\lesseqgtr g\Delta$, ferner $g<p$ und $g<2q\sqrt{N}$, also $\frac{g\cdot\delta}{p}<\Delta$ und $\frac{g\cdot\delta}{2q\sqrt{N}}<\Delta$. Für die genannte Bewegung gilt für $t\gtreqless t_0$

$$|x_i|\lesseqgtr\frac{g\delta}{p_i}\lesseqgtr\frac{g\cdot\delta}{p}<\Delta, \qquad |y_\mu|\lesseqgtr\frac{g\cdot\delta}{q_\mu\cdot 2\sqrt{N}}\lesseqgtr\frac{g\cdot\delta}{q\cdot 2\sqrt{N}}<\Delta.$$

Somit ist die Existenz einer Bewegung mit den geforderten Eigenschaften erwiesen.

Wir nehmen nun an, es liege irgend eine Bewegung vor, welche für $t=t_0$ die gewählte Stelle liefert und für $t\gtreqless t_0$ im Gebiete $|x|<\Delta$, $|y|<\Delta$ bleibt. Da Δ den in § 17 für D angeführten Bedingungen genügt, so gilt dann für $t\gtreqless t_0$ auch

$$\sum_{i=1}^{M}\xi_i^2+\sum_{\mu=1}^{N}\eta_\mu^2<8nQ\Delta^2,$$

sodaß für $t\gtreqless t_0$ die Bewegung in (H) bleibt. Zwei derartige Bewegungen würden für $t=t_0$ gleiche x, ξ, y liefern und daher (vergl. den Anfang dieses Paragraphen) zusammenfallen. Somit ist unser Satz vollständig bewiesen. Wir beweisen nun noch folgenden Satz:

Zu jedem System x, ξ, welches den Bedingungen $p_i|x_i|,\ |\xi_i|\lesseqgtr\frac{g}{3\sqrt{M}}\cdot\delta$ genügt, gibt es eine und nur eine Bewegung, welche für einen vorgeschriebenen Moment diese x, ξ-Stelle als partielle Anfangsstelle liefert und für alle t im Gebiete $|x|,\ |y|<\Delta$ bleibt. Dabei gilt für alle t

$$p_i|x_i|,\ |\xi_i|\lesseqgtr g\cdot\delta, \qquad |u_\mu|,\ |v_\mu|\lesseqgtr\frac{g}{2\sqrt{N}}\cdot\delta,$$

$$|\eta_\mu|,\ q_\mu|y_\mu|\lesseqgtr\frac{g}{2\sqrt{N}}\cdot\delta.$$

In der Tat, $g\cdot\delta$ genügt den Bedingungen, welche für d aufgestellt sind. Nach einem Satze des § 11 gibt es daher eine Bewegung, welche für den Anfangsmoment die x, ξ-Stelle liefert und für alle t im Gebiete

$$p_i|x_i|,\ |\xi_i| \leqq g\cdot\delta, \qquad |u_\mu|,\ |v_\mu| \leqq \frac{g\cdot\delta}{2\sqrt{N}}$$

bleibt. Hieraus folgt zunächst für alle t $|\eta_\mu|,\ q_\mu|y_\mu| \leqq \frac{g\cdot\delta}{2\sqrt{N}}$ und ferner nach dem Vorhergehenden $|x_i|,\ |y_\mu| < \Delta$.

Es bleibt noch übrig, zu beweisen, daß diese Bewegung die einzige ist, die den im ersten Teil des Satzes geforderten Bedingungen genügt. Bleibt eine Bewegung für alle t in $|x|,\ |y| < \Delta$, so bleibt sie nach dem Vorhergehenden, wie leicht zu sehen, für alle t in (H). Nach einem Satze am Schluß des § 11 ist also nur *eine* Bewegung der geforderten Art vorhanden. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 19. Über einige Eigenschaften der im vorigen Paragraphen charakterisierten Lösungen.

I. Wir wählen eine positive Größe $h < q$ aus und hierauf wie am Anfang des § 12 ein Gebiet (J)

$$|\xi_i|, p_i|x_i| \leqq A_i, \qquad |\eta_\mu|, q_\mu|y_\mu| \leqq B_\mu.$$

Ferner wählen wir eine positive Größe H, welche kleiner ist als alle A, B-Größen. Endlich bestimmen wir eine positive Zahl L, welche den Bedingungen

$$L \leqq S, \quad L < \frac{1}{8nP}, \quad p_i\cdot L \leqq A_i - H,$$

$$\sqrt{8nQ}\cdot L \leqq A_i - H, \quad (\sqrt{8nQ} + q_\mu)\, L \leqq B_\mu - H$$

genügt. (S, P, Q haben dieselbe Bedeutung wie in § 17).

Gilt bei einer Bewegung für $t \geqq t_0$ $|x_i|, |y_\mu| < L$, so gibt es unendlich viele Bewegungen, welche für $t \geqq t_0$ in (J) bleiben und für $t \to \infty$ sich dieser Bewegung asymptotisch in der Weise nähern, daß die mit e^{ht} multiplizierten für gleiche Zeiten gebildeten Unterschiede der x, ξ, y, η nach Null konvergieren.

In der Tat, da L den in § 17 für D angegebenen Bedingungen genügt, so gilt für die erstgenannte Bewegung für $t \geqq t_0$

$$\sum_{i=1}^{M} \xi_i^2 + \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu^2 < 8nQL^2.$$

Wir haben also für $t \overline{\overline{>}} t_0$

$$p_i|x_i| < p_i \cdot L \overline{\overline{<}} A_i - H, \qquad |\xi_i| < \sqrt{8nQ} \cdot L \overline{\overline{<}} A_i - H,$$
$$|u_\mu|, |v_\mu| \overline{\overline{<}} |\eta_\mu| + q_\mu |y_\mu| < (\sqrt{8nQ} + q_\mu) L \overline{\overline{<}} B_\mu - H.$$

Die Anwendung des Satzes in § 12 lehrt nunmehr unmittelbar die Wahrheit unserer Behauptung.

II. Wir bezeichnen mit s den größten unter den p_i, q_μ vorkommenden Wert; ferner möge gesetzt werden

$$g = \frac{1}{9n(\sqrt{8Q} + s)},$$

wobei Q, sowie die sogleich vorkommenden Größen S und P dieselbe Bedeutung haben wie in § 17. Es möge nun eine Zahl h gemäß der Bedingung $0 < h < q$ beliebig aber fest gewählt werden. e sei irgend eine positive Zahl, die den § 13 genannten Bedingungen genügt und außerdem den Bedingungen $g \cdot e \overline{\overline{<}} S$, $ge < \frac{1}{8nP}$. Dann gilt folgender Satz:

Bleibt eine Bewegung B für $t \overline{\overline{>}} t_0$ im Gebiete $|x_i|, |y_\mu| < g \cdot e$, so gibt es eine und nur eine für **alle** *t im Gebiete*

$$p_i|x_i|, |\xi_i| \overline{\overline{<}} e, \qquad |u_\mu|, |v_\mu| \overline{\overline{<}} \frac{e}{2\sqrt{N}}$$

bleibende Bewegung E, welche folgende Eigenschaft besitzt: Die Bewegung B strebt für $t \to \infty$ in der Weise der Bewegung E zu, daß die mit e^{ht} multiplizierten für gleiche Zeiten gebildeten Unterschiede der x, ξ, y, η-Koordinaten von B und E für $t \overline{\overline{>}} t_0$ dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze bleiben. Diese Bewegung E bleibt offenbar auch stets im Gebiete

$$p_i|x_i|, |\xi_i| \overline{\overline{<}} e, \qquad |\eta_\mu|, q_\mu|y_\mu| \overline{\overline{<}} \frac{e}{2\sqrt{N}}.$$

Ferner konvergieren die genannten mit e^{ht} multiplizierten Koordinatenunterschiede für $t \to \infty$ nach Null.

Wir erinnern an den in § 13 gefundenen Satz. Zum Beweise des eben ausgesprochenen Theorems ist es offenbar hinreichend zu zeigen, daß für $t \overline{\overline{>}} t_0$ die Bewegung B im Gebiete

$$p_i|x_i|, |\xi_i| \leqq \left(\frac{1}{3\sqrt{M}} - \frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right)e,$$

$$|u_\mu| \leqq \left(\frac{1}{2\sqrt{N}} - \frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right)e, \qquad \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq \left(\frac{e}{9\sqrt{M+N}}\right)^2$$

bleibt. Daß dies der Fall ist, wollen wir nunmehr beweisen.
Da $g \cdot e$ den in § 17 für D angegebenen Bedingungen genügt, so gilt nach § 17 bei der Bewegung B für $t \geqq t_0$ $\sum_{i=1}^{M} \xi_i^2 + \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu^2 < 8nQg^2e^2$. Wir haben dabei außerdem

$$p_i|x_i| < p_i \cdot g \cdot e = \frac{p_i}{9n(\sqrt{8Q}+s)} \cdot e < \frac{e}{9(M+N)} < \frac{e}{9\sqrt{M+N}}$$

$$= e\left(\frac{1}{3\sqrt{M+N}} - \frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right) < e\left(\frac{1}{3\sqrt{M}} - \frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right),$$

$$|\xi_i| < \sqrt{8nQ} \cdot g \cdot e = \frac{\sqrt{8nQ} \cdot e}{9n(\sqrt{8Q}+s)} = \frac{\sqrt{8nQ} \cdot e}{9\sqrt{n}(\sqrt{8nQ}+\sqrt{n} \cdot s)} < \frac{e}{9\sqrt{M+N}}$$

$$< e\left(\frac{1}{3\sqrt{M}} - \frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right),$$

$$|u_\mu| = |\eta_\mu + q_\mu y_\mu| < \sqrt{8nQ} \cdot g \cdot e + s \cdot g \cdot e = \frac{\sqrt{8nQ}+s}{9n(\sqrt{8Q}+s)} \cdot e$$

$$= \frac{\sqrt{8nQ}+s}{9\sqrt{n}(\sqrt{8nQ}+\sqrt{n} \cdot s)} \cdot e < \frac{e}{9\sqrt{M+N}}$$

$$= e\left(\frac{1}{3\sqrt{M+N}} - \frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right) < e\left(\frac{1}{2\sqrt{N}} - \frac{2}{9\sqrt{M+N}}\right),$$

$$\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^{N} (\eta_\mu - q_\mu y_\mu)^2 < 8nQg^2e^2 + Ns^2g^2e^2 + 2\sum_{\mu=1}^{N} |\eta_\mu| s \cdot g \cdot e$$

$$< 8nQg^2e^2 + Ns^2g^2e^2 + 2sge\sqrt{N} \cdot \sqrt{8nQ} \cdot g \cdot e$$

$$= (\sqrt{8nQ} + \sqrt{N} \cdot s)^2 g^2 e^2 = \left[\frac{\sqrt{8nQ} + \sqrt{N} \cdot s}{9n(\sqrt{8Q}+s)}\right]^2 e^2$$

$$< \left[\frac{\sqrt{8nQ} + \sqrt{n}s}{9n(\sqrt{8Q}+s)}\right]^2 e^2 = \left[\frac{1}{9\sqrt{M+N}}\right]^2 e^2.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

III. Wir wählen gemäß § 14 eine Umgebung (T) der Stelle

$$x = \xi = y = \eta = 0.$$

Es sei nun Δ eine Zahl, welche den Bedingungen $\Delta > 0$, $\Delta \overline{\leqq} S$, $\Delta < \frac{1}{8nP}$ (vgl. § 17) genügt und ferner der Bedingung, daß alle Stellen, für welche $|x|, |y| < \Delta$, $\sum_{i=1}^{M} \xi_i^2 + \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu^2 < 8nQ\Delta^2$ gilt, in der eben genannten Umgebung (T) liegen.

α) *Gilt bei einer Bewegung für* $t \overline{\geqq} \tau$ $|x_i|, |y_\mu| < \Delta$, *so ist die Konstante des Integrals der lebendigen Kraft für diese Bewegung* $\overline{\geqq} 0$.

In der Tat, für $t \overline{\geqq} \tau$ gilt bei dieser Bewegung

$$\sum_{i=1}^{M} \xi_i^2 + \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu^2 < 8nQ\Delta^2.$$

Folglich bleibt die Bewegung für $t \overline{\geqq} \tau$ in (T). Die Anwendung der Folgerung I in § 14 lehrt dann die Richtigkeit unserer Behauptung.

β) *Gilt bei einer Bewegung für alle* t $|x_i|, |y_\mu| < \Delta$ *und ist die Konstante des Integrals der lebendigen Kraft* $C = 0$, *so gilt für diese Bewegung immer* $x = \xi = y = \eta = 0$.

Da die betrachtete Bewegung offenbar immer in (T) liegt, so folgt die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelbar aus der Folgerung II in § 14.

γ) *Für* $t \overline{\geqq} \tau$ *gelte bei einer Bewegung* $|x_i|, |y_\mu| < \Delta$, *und die Konstante des Integrals der lebendigen Kraft* C *sei gleich Null. Diese Bewegung strebt dann für* $t \to \infty$ *nach* $x = \xi = y = \eta = 0$. *Ist* d *eine Konstante, welche der Bedingung* $0 < d < q$ *genügt, so streben dabei auch noch die mit* e^{dt} *multiplizierten* x, ξ, y, η*-Größen nach Null.*

Die Richtigkeit dieser Behauptung geht aus der Folgerung III in § 14 unmittelbar hervor.

§ 20. Sätze über Lösungen, die der Gleichgewichtslage zustreben.

I. Es möge m eine Zahl > 1 und T die kleinste der Zahlen $p, 1, \frac{2q}{1+q}$ bedeuten. Ferner sei $H > 0$ so gewählt, daß das Gebiet

$$(1.) \qquad |\xi_i|, p_i |x_i| \overline{\leqq} H, \qquad |\eta_\mu|, q_\mu |y_\mu| \overline{\leqq} H,$$

soweit die x, y in Frage kommen, innerhalb $(\mathfrak{T})$ (vergl. § 5) liegt und in ihm die partiellen Differentialquotienten der X, Y nach den x, ξ, y, η absolut

kleiner sind als

$$\frac{q \cdot T}{4(M+N)m}.$$

Dann genügt offenbar H der § 15, I für D angeführten Bedingung. Wir beweisen folgenden Satz:

Es sei $0 < \gamma \leqq H$. *Jeder y-Stelle des Gebietes*

$$q_\mu |y_\mu| \leqq \frac{m-1}{2\sqrt{N}\,m} \cdot \gamma \qquad (\mu = 1, 2, \ldots N)$$

entspricht eine und nur eine Bewegung, welche für einen vorgeschriebenen Zeitmoment t_0 *die genannte y-Stelle als partielle Anfangsstelle liefert, für* $t \geqq t_0$ *in* (1.) *bleibt und für* $t \to \infty$ *der Stelle* $x = \xi = y = \eta = 0$ *zustrebt. Diese Bewegung bleibt für* $t \geqq t_0$ *in*

$$(2.) \qquad |\xi_i|,\ p_i |x_i| \leqq \gamma, \qquad |\eta_\mu|,\ q_\mu |y_\mu| \leqq \gamma.$$

Die mit $e^{\alpha t}$ *multiplizierten Koordinaten* x, ξ, y, η *streben für* $t \to \infty$ *nach Null, wenn* α *irgend eine positive Konstante kleiner als* q *bedeutet.*

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir an, es sei eine y-Stelle der genannten Art gewählt. Ihre Koordinaten wollen wir mit $y_{10}, y_{20}, \ldots y_{N0}$ bezeichnen. Wir benutzen nun die am Schluß von § 15, I eingeführten Funktionen $(x), (\xi), (u)$ der v, wobei jetzt H die Rolle von D spielt. Diese Funktionen sind für alle v des Gebietes $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq H^2$ definiert und daselbst stetig. Wir bilden weiter die Funktionen der v

$$(u_\mu) - v_\mu - 2 q_\mu y_{\mu 0} = \psi_\mu(v). \qquad (\mu = 1, 2, \ldots N)$$

Wir behaupten, daß im Gebiete $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq \gamma^2$ *eine v-Stelle existieren muß, für welche alle* $\psi_\mu = 0$ *sind.*

In der Tat, wir wollen versuchsweise annehmen, diese Behauptung sei unrichtig. Dann gibt es nach einem schon früher benutzten Satz auf dem Rande des Gebietes $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq \gamma^2$ eine v-Stelle, für welche

$$\psi_\mu(v) = p \cdot v_\mu, \qquad p > 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots N)$$

gilt. Für diese Stelle haben wir

$$(u_\mu) - 2\,q_\mu\,y_{\mu 0} = (1+p)\,v_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots N)$$

$$(3.) \qquad \sum_{\mu=1}^{N} [(u_\mu) - 2\,q_\mu\,y_{\mu 0}]^2 = (1+p)^2 \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 = (1+p)^2\,\gamma^2 .$$

Nach § 15, I gibt es eine Bewegung, welche für $t = t_0$ die eben besprochene v-Stelle und die durch die entsprechenden (u), (x), (ξ) gebildeten u, x, ξ-Stellen liefert, für $t \gtreqless t_0$ in dem Gebiete (1.) (s. den Anfang dieses Paragraphen) bleibt und für $t \to \infty$ der Stelle $x = \xi = y = \eta = 0$ so zustrebt, daß die mit $e^{\frac{q}{2}t}$ multiplizierten Koordinaten nach Null streben.

Man kann nun eine Umgebung (U) der Stelle $x = \xi = y = \eta = 0$ finden, welche das Gebiet (1.) enthält und für welche die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung der X, Y nach den x, ξ, y, η absolut kleiner sind als

$$\frac{q \cdot T}{4(M+N)m}.$$

Das Gebiet (U) genügt den Bedingungen, welche in § 6, II für (C) eingeführt wurden, wenn gesetzt wird $l = 1$, $h = \frac{q}{2}$, $m = m$. Wir können daher den am Schluß des § 6 ausgesprochenen Satz anwenden, indem wir die zuletzt besprochene Bewegung und die Bewegung $x = \xi = y = \eta = 0$ die Rolle der in dem genannten Satze zugrunde gelegten zwei Bewegungen spielen lassen. Da in unserem Falle die beiden Bewegungen nicht zusammenfallen (für $t = t_0$ ist ja für die erstgenannte Bewegung $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 = \gamma^2$), so haben wir also für die zuerst genannte Bewegung für $t \gtreqless t_0$

$$\sum_{i=1}^{M} (\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2) + m^2 \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2 < \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 .$$

Für $t = t_0$ ergibt sich demnach

$$(4.) \qquad m \sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2} < \gamma.$$

Für $t = t_0$ haben wir daher unter Berücksichtigung von (3.)

$$\gamma < (1+p)\,\gamma = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} (u_\mu - 2\,q_\mu\,y_{\mu 0})^2}$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2} + \sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} 4\,q_\mu^2\,y_{\mu 0}^2} < \frac{\gamma}{m} + \sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} 4\,q_\mu^2\,y_{\mu 0}^2},$$

also

$$\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} 4 q_\mu^2 y_{\mu 0}^2} > \frac{m-1}{m}\gamma .$$

Nun haben wir aber nach dem Vorhergehenden

$$q_\mu |y_{\mu 0}| \leqq \frac{m-1}{2\sqrt{N}\cdot m}\cdot\gamma ,$$

folglich

$$\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N} 4 q_\mu^2 y_{\mu 0}^2} \leqq \sqrt{\left(\frac{m-1}{m}\cdot\gamma\right)^2} = \frac{m-1}{m}\cdot\gamma .$$

Somit ergibt sich ein Widerspruch. Wir müssen daher die vorher versuchsweise gemachte Annahme fallen lassen. Die Richtigkeit der uns hier zunächst beschäftigenden Behauptung ist also erwiesen.

Wir wählen nun eine v-Stelle des Gebietes $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq \gamma^2$ aus, für welche alle $\psi = 0$ sind. Zu dieser v-Stelle gibt es nach § 15, I eine Bewegung, welche für $t = t_0$ die v-Stelle als partielle Anfangsstelle liefert, für $t \geqq t_0$ in (1.) bleibt und für $t \to \infty$ der Stelle $x = \xi = y = \eta = 0$ zustrebt. Diese Bewegung bleibt für $t \geqq t_0$ in

$$|\xi_i|, p_i|x_i| \leqq \gamma, \qquad |\eta_\mu|, q_\mu|y_\mu| \leqq \gamma .$$

Die mit $e^{\alpha\cdot t}$ multiplizierten Koordinaten x, ξ, y, η streben für $t \to \infty$ nach Null, wenn α irgend eine positive Konstante kleiner als q bedeutet. Für $t = t_0$ haben wir ferner $x_i = (x_i)$, $\xi_i = (\xi_i)$, $u_\mu = (u_\mu)$ und

$$y_\mu = \frac{(u_\mu) - v_\mu}{2 q_\mu} = \frac{2 q_\mu y_{\mu 0}}{2 q_\mu} = y_{\mu 0} . \qquad (\mu = 1, 2, \ldots N)$$

Damit ist ein Teil des Satzes zu Anfang dieses Paragraphen bewiesen. Um den Rest des Satzes zu beweisen, nehmen wir versuchsweise an, es gäbe zwei *verschiedene* Bewegungen, welche den Bedingungen genügen, daß sie für $t = t_0$ die erwähnte y-Stelle als partielle Anfangsstelle liefern, für $t \geqq t_0$ in (1.) bleiben und für $t \to \infty$ der Stelle $x = \xi = y = \eta = 0$ zustreben. Wir wählen dann eine Umgebung (U) der Art, wie sie S. 263 charakterisiert worden ist. Aus § 14, Folgerung III schließt man leicht, daß die mit $e^{\frac{q}{2}t}$ multiplizierten x, ξ, y, η für $t \to \infty$ bei beiden Bewegungen nach Null streben. Die Anwendung des Satzes § 6, II lehrt dann, daß für $t \geqq t_0$

$$(5.) \qquad \sum_{i=1}^{M} (\xi_i'^2 + p_i^2 x_i'^2) + m^2 \sum_{\mu=1}^{N} u_\mu'^2 - \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu'^2 < 0$$

gilt, wobei die ξ', x', u', v' die Unterschiede der ξ, x, u, v für die beiden Bewegungen bei gleichen Zeiten bedeuten. Für $t=t_0$ haben wir wegen $y'_\mu=0$

$$u'_\mu=v'_\mu=\eta'_\mu.$$

Da aber $m>1$, so sieht man, daß für $t=t_0$ (5.) nicht erfüllt sein kann. Wir sind somit zu einem Widerspruch gekommen und müssen daher unsere versuchsweise gemachte Annahme fallen lassen. Der Satz am Anfang dieses Paragraphen ist nunmehr vollständig bewiesen.

II. Wir führen wiederum das in § 8 charakterisierte Gebiet (H) ein. Dabei erinnern wir uns, daß dieses Gebiet (H) nach § 10 diejenigen Eigenschaften besitzt, welche wir in § 6 für (Ω) nachwiesen, wenn gesetzt wird $l_1=l_2=\cdots=l_M=1$, $m_1=m_2=\cdots=m_N=\lambda$, $\sigma=\varepsilon$. (Über die Werte von λ und ε s. § 10). Wir beweisen nun folgenden Satz:

Bleibt eine Bewegung für $t>t_0$ in (H) und streben für $t\to\infty$ die $x_1, x_2, \ldots x_M$ nach Null, so konvergieren für $t\to\infty$ auch die ξ, y, η alle nach Null.

Wir werden zunächst beweisen, daß alle ξ nach Null streben. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß es für das Gebiet (H) eine solche Konstante $K>0$ gibt, daß, wenn eine Bewegung in einem Moment in (H) liegt, dann

$$\left|\frac{d\xi_1}{dt}\right|, \left|\frac{d\xi_2}{dt}\right|, \ldots \left|\frac{d\xi_M}{dt}\right| < K$$

gilt. Daß dem so ist, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Wir wählen nun $e>0$ beliebig und ferner einen der Indizes $1, 2, \ldots M$, etwa μ. Wir werden zeigen, daß für die in unserem Satz erwähnte Bewegung schließlich $|\xi_\mu|<e$ gilt. Zu dem Zwecke setzen wir $g=\frac{2e}{K+4}$. Weiter bestimmen wir $\tau>t_0$ so, daß $|x_\mu|<g^2$ für $t>\tau$ gilt. Für irgend ein $t>\tau$ haben wir dann

$$x_\mu(t+g)=x_\mu(t)+\xi_\mu(t)\cdot g+\frac{1}{2}\xi'_\mu(t+\theta\cdot g)\cdot g^2,$$

wobei ξ'_μ auf den Differentialquotienten von ξ_μ nach t hindeutet. Hieraus folgt:

$$|\xi_\mu(t)| \leqq \frac{|x_\mu(t+g)|}{g}+\frac{|x_\mu(t)|}{g}+\frac{1}{2}|\xi'_\mu(t+\theta g)|\,g$$

$$<2g+\frac{K}{2}g=\frac{g}{2}(K+4)=e.$$

Damit haben wir bewiesen, daß alle ξ für $t\to\infty$ nach Null konvergieren.

Nunmehr bezeichnen wir mit L eine Zahl, welche größer ist als die Werte, welche $\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2$, $\sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2$ für Stellen des Gebietes (H) annehmen können. Ferner wählen wir einen Wert $\vartheta > t_0$ fest aus. Aus einem Satze des § 6, I (gegen Ende) und der Bemerkung bezüglich (H) am Anfang des Teiles II unseres Paragraphen schließen wir nun, daß für die betrachtete Bewegung, sobald $t > \vartheta$ ist,

$$\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^2,\ \sum_{\mu=1}^{N} v_\mu^2 \leqq \frac{2}{1-\lambda^2} \sum_{i=1}^{M} (\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2) + L e^{-(2q-\varepsilon)(t-\vartheta)}$$

gilt. Hieraus geht unmittelbar hervor, daß für $t \to \infty$ auch alle u und v nach Null streben. Damit ist der in Rede stehende Satz bewiesen.

§ 21. Sätze über Lösungen, die der Gleichgewichtslage zustreben. (Fortsetzung.)

Wir wählen eine Zahl Δ, welche erstens den Bedingungen

$$\Delta > 0, \qquad \Delta \leqq S, \qquad \Delta < \frac{1}{8nP}$$

(vergl. § 17) genügt, zweitens der Bedingung, daß das Gebiet

$$|x_i|, |y_\mu| < \Delta, \qquad \sum_{i=1}^{M} \xi_i^2 + \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu^2 < 8nQ\Delta^2$$

im Gebiete (1.) des § 20, I und im Gebiete (H) (vergl. § 20, II) liegt.*) Dann gilt $p \cdot \Delta \leqq H$, $q \cdot \Delta \leqq H$. Ferner bezeichne $\mathfrak{g}$ den kleinsten Wert unter $\Delta \cdot p$, $\Delta \cdot q$. Wir beweisen nun folgenden Satz:

Es sei $0 < h < \mathfrak{g}$. *Jeder* y*-Stelle des Gebietes*

$$q_\mu |y_\mu| \leqq \frac{m-1}{2\sqrt{N \cdot m}} h \qquad (\mu = 1, 2, \ldots N)$$

entspricht eine und nur eine Bewegung, welche für einen vorgeschriebenen Zeitmoment t_0 *die genannte* y*-Stelle als partielle Anfangsstelle liefert und für* $t \geqq t_0$ *im Gebiete* $|x_i|, |y_\mu| < \Delta$ *bleibt, während die Koordinaten* $x_1, x_2, \ldots x_M$ *für* $t \to \infty$ *nach Null streben. Diese Bewegung bleibt für* $t \geqq t_0$ *in*

$$|\xi_i|, p_i |x_i| \leqq h, \qquad |\eta_\mu|, q_\mu |y_\mu| \leqq h$$

und strebt für $t \to \infty$ *der Gleichgewichtslage in der Weise zu, daß die mit* $e^{\alpha \cdot t}$

*) In § 20, I bezeichnet H eine Zahl, in § 20, II (H) ein Gebiet. Dieser Umstand kann im folgenden wohl kaum zu einem Mißverständnis Veranlassung geben.

multiplizierten x, ξ, y, η *für* $t \to \infty$ *nach Null konvergieren, wenn* α *irgend eine positive Konstante kleiner als* q *bedeutet.*

Die Existenz einer Bewegung mit den genannten Eigenschaften geht aus dem Satze § 20, I sofort hervor. Um den Rest unserer Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, daß eine Bewegung W vorliegt, welche für $t=t_0$ die in dem Satze genannte y-Stelle als partielle Anfangsstelle liefert und für $t \geqq t_0$ in dem Gebiete $|x_i|, |y_\mu| < \Delta$ bleibt, während die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_M$ für $t \to \infty$ nach Null konvergieren. Nach § 17 haben wir bei dieser Bewegung für $t \geqq t_0$ $\sum_{i=1}^{M} \xi_i^2 + \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu^2 < 8nQ\Delta^2$. Da hiernach die Bewegung für $t > t_0$ in (H) bleibt, so lehrt der Satz § 20, II, daß für $t \to \infty$ alle x, ξ, y, η nach Null konvergieren. Ferner bleibt (siehe den Anfang dieses Paragraphen) unsere Bewegung für $t \geqq t_0$ im Gebiete (1.) des § 20, I. h genügt der § 20, I für γ angegebenen Bedingung. Der Satz § 20, I lehrt nunmehr, daß die Bewegung W die einzige ist, welche die für W vorausgesetzten Eigenschaften besitzt. Damit ist der Satz am Anfang dieses Paragraphen vollständig bewiesen.

§ 22. Bemerkungen über Lösungen, welche in der Nähe der Gleichgewichtslage bleiben.

Aus den S. 203 bezüglich R gemachten Bemerkungen geht hervor, daß zu jeder Zahl $k > 0$ eine Umgebung von $x=\xi=y=\eta=0$ gefunden werden kann, für welche

$$|R| \leqq k\Big(\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2 + x_i^2) + \sum_{\mu=1}^{N}(\eta_\mu^2 + y_\mu^2)\Big)$$

gilt. Ferner folgt aus § 6 (nach einer im Vorhergehenden mehrfach vorkommenden Schlußweise), daß zu jeder Zahl $\varkappa > 0$ eine Umgebung (U) von $x=\xi=y=\eta=0$ gefunden werden kann, welche folgende Eigenschaft besitzt: Bleibt eine Bewegung für alle t in (U), so gilt stets

$$\sum_{\mu=1}^{N}(u_\mu^2 + v_\mu^2) \leqq \varkappa \sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2), \qquad \sum_{\mu=1}^{N}(\eta_\mu^2 + y_\mu^2) \leqq \varkappa \sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2 + p_i^2 x_i^2).$$

Bleiben zwei Bewegungen für alle t in (U), so gilt stets

$$\sum_{\mu=1}^{N}(u_{\mu 1}^2 + v_{\mu 1}^2) \leqq \varkappa \sum_{i=1}^{M}(\xi_{i1}^2 + p_i^2 x_{i1}^2), \qquad \sum_{\mu=1}^{N}(\eta_{\mu 1}^2 + y_{\mu 1}^2) \leqq \varkappa \sum_{i=1}^{M}(\xi_{i1}^2 + p_i^2 x_{i1}^2),$$

wobei $u_{\mu 1}, v_{\mu 1}, \eta_{\mu 1}, y_{\mu 1}, \xi_{i1}, x_{i1}$ auf die für gleiche Zeiten gebildeten Unterschiede der $u_\mu, v_\mu, \eta_\mu, y_\mu, \xi_i, x_i$ für die beiden Bewegungen hindeuten.

Für eine jede Bewegung haben wir

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)+\sum_{\mu=1}^{N}(\eta_\mu^2-q_\mu^2y_\mu^2)+R=C,$$

wobei C eine der Bewegung entsprechende Konstante ist. Aus dem Vorhergehenden schließen wir, daß zu jeder Zahl $\omega>0$ eine Umgebung (V) von $x=\xi=y=\eta=0$ existiert, welche folgende Eigenschaft besitzt: Bleibt eine Bewegung für alle t in (V), so gilt für diese Bewegung stets

$$\left|\sum_{\mu=1}^{N}(\eta_\mu^2-q_\mu^2y_\mu^2)+R\right|\leqq\frac{\omega}{1+\omega}\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2).$$

Für eine solche Bewegung haben wir also

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)-\frac{\omega}{1+\omega}\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)\leqq C\leqq\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)+\frac{\omega}{1+\omega}\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)$$

und somit

$$C=\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)\left[1-\frac{\omega}{1+\omega}\right]+\vartheta\frac{2\omega}{1+\omega}\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2),\qquad (0\leqq\vartheta\leqq1)$$

$$C=\frac{1+\vartheta\cdot2\omega}{1+\omega}\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2),$$

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)=C\left[1+\omega\cdot\frac{1-2\vartheta}{1+2\vartheta\omega}\right].$$

Offenbar ist

$$\left|\frac{1-2\vartheta}{1+2\vartheta\omega}\right|\leqq1,\qquad\text{also}\qquad\left|\omega\cdot\frac{1-2\vartheta}{1+2\vartheta\omega}\right|\leqq\omega.$$

Somit gilt für eine solche Bewegung immer

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)=C(1+\eta),\quad|\eta|\leqq\omega.$$

Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Zu jeder positiven Zahl ω gibt es eine solche Umgebung von

$$x=\xi=y=\eta=0,$$

daß für jede für alle t in dieser Umgebung bleibende Bewegung

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2x_i^2)=C(1+\eta),\quad|\eta|\leqq\omega$$

gilt. Hierbei ist C der dieser Bewegung entsprechende Wert der Konstanten des Integrals der lebendigen Kraft (in der hier gebrauchten Form).

Indem wir § 17 berücksichtigen, können wir sagen:

Zu jeder Zahl $\omega>0$ gibt es eine Zahl $H>0$ von der Beschaffenheit, daß, wenn bei einer Bewegung $|x_i|, |y_\mu|<H$ für alle t gilt, dann auch die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2 x_i^2)=C(1+\eta), \quad |\eta|\leqq\omega$$

stattfindet. Hierbei ist C wie vorher aufzufassen.

Indem wir § 17 sowie den Anfang unseres Paragraphen berücksichtigen, können wir sagen:

Zu jeder Zahl $\varkappa>0$ gibt es eine Zahl $G>0$ von der Beschaffenheit, daß Folgendes gilt: Sind bei einer Bewegung $|x_i|, |y_\mu|<G$ für alle t, so gilt stets

$$\sum_{\mu=1}^{N}(u_\mu^2+v_\mu^2), \quad \sum_{\mu=1}^{N}(\eta_\mu^2+y_\mu^2)\leqq\varkappa\sum_{i=1}^{M}(\xi_i^2+p_i^2 x_i^2).$$

Sind bei zwei Bewegungen für alle t die $|x_i|, |y_\mu|<G$, so gilt stets

$$\sum_{\mu=1}^{N}(u_{\mu 1}^2+v_{\mu 1}^2), \quad \sum_{\mu=1}^{N}(\eta_{\mu 1}^2+y_{\mu 1}^2)\leqq\varkappa\sum_{i=1}^{M}(\xi_{i1}^2+p_i^2 x_{i1}^2),$$

wobei $u_{\mu 1}, v_{\mu 1}, \eta_{\mu 1}, y_{\mu 1}, \xi_{i1}, x_{i1}$ auf die für gleiche Zeiten gebildeten Unterschiede der $u_\mu, v_\mu, \eta_\mu, y_\mu, \xi_i, x_i$ für die beiden Bewegungen hindeuten.

§ 23. Über den besonderen Fall, in welchem eine stabile Koordinate vorliegt.

I. Wir setzen in diesem Paragraphen voraus, daß *eine* stabile Koordinate vorhanden ist. Das System x_i, ξ_i, p_i, X_i $(i=1, 2, \ldots M)$ ersetzen wir durch x, ξ, p, X. Aus einem Satze in § 11 (S. 225) folgt, daß eine Umgebung (A) von $x=\xi=y=\eta=0$ existiert von folgender Beschaffenheit: Bei einer für alle t in dieser Umgebung bleibenden Bewegung gilt niemals $x=\xi=0$, es sei denn, daß diese Bewegung überhaupt für alle t durch $x=\xi=y=\eta=0$ dargestellt wird.

Wir wollen nun irgend eine Bewegung ins Auge fassen, welche für alle t in (A) bleibt, ohne daß dabei stets $x=\xi=y=\eta=0$ gilt. Dann ist nach dem eben Gesagten niemals $x=\xi=0$. Nach § 5 haben wir dann

$$\frac{\xi\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{d\xi}{dt}}{\xi^2+p^2x^2}=1-\frac{xX}{\xi^2+p^2x^2}.$$

Es seien nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ beliebig gewählte positive Zahlen. Es existiert dann eine Umgebung (Z) von $x=\xi=y=\eta=0$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für die Stellen $x, \xi, y_1, y_2, \dots y_N, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_N$ dieser Umgebung gilt $|X| \leqq \varepsilon_1\left(|x|+|\xi|+\sum_{\mu=1}^{N}(|y_\mu|+|\eta_\mu|)\right)$ (vergl. § 5).

2. Bleibt eine Bewegung für alle t in (Z), so gilt stets

$$\sum_{\mu=1}^{N}(\eta_\mu^2+y_\mu^2) \leqq \varepsilon_2\,(\xi^2+p^2\,x^2)$$

(vergl. § 22 gegen Anfang).

Aus dem in diesem Paragraphen bisher Gesagten folgt nun leicht folgender Satz:

Zu jeder positiven Zahl ω existiert eine Umgebung (L) von

$$x=\xi=y=\eta=0$$

mit folgenden Eigenschaften: Liegt eine Bewegung für alle t in (L), so ist für dieselbe niemals $x=\xi=0$, es sei denn, daß die Bewegung überhaupt für alle t durch $x=\xi=y=\eta=0$ dargestellt wird. Liegt dieser letztgenannte Fall nicht vor, so gilt stets

$$(1.)\qquad \frac{\xi\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{d\xi}{dt}}{\xi^2+p^2x^2}=1-\nu,\quad |\nu|<\omega.$$

Wir wollen nun annehmen, es sei ein Wert $0<\omega_0<1$ ausgewählt. Die Umgebung (L_0) möge dem gewählten ω-Wert wie in dem eben bewiesenen Satze entsprechen.

Eine Bewegung möge für alle t in (L_0) liegen, ohne daß dabei immer $x=\xi=y=\eta=0$ gilt. Wir führen eine Hülfsgröße α derart ein, daß

$$(2.)\qquad \frac{p\cdot x_0}{\sqrt{\xi_0^2+p^2x_0^2}}=\sin\alpha,\qquad \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^2+p^2x_0^2}}=\cos\alpha$$

gilt. Hierbei bedeuten x_0, ξ_0 die Werte der Größen x, ξ bei der betrachteten Bewegung für $t=t_0$. Weiter setzen wir

$$(3.)\qquad \begin{cases} u=\sqrt{\xi^2+p^2x^2}\cdot\cos\left[\int_{t_0}^{t}p\,(1-\nu)\,dt+\alpha\right], \\ v=\sqrt{\xi^2+p^2x^2}\cdot\sin\left[\int_{t_0}^{t}p\,(1-\nu)\,dt+\alpha\right]. \end{cases}$$

Dann haben wir

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{p^2 x \dfrac{dx}{dt} + \xi \dfrac{d\xi}{dt}}{p^2 x^2 + \xi^2}\, u - \dfrac{p\left(\xi \dfrac{dx}{dt} - x \dfrac{d\xi}{dt}\right)}{\xi^2 + p^2 x^2}\, v, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{p^2 x \dfrac{dx}{dt} + \xi \dfrac{d\xi}{dt}}{p^2 x^2 + \xi^2}\, v + \dfrac{p\left(\xi \dfrac{dx}{dt} - x \dfrac{d\xi}{dt}\right)}{\xi^2 + p^2 x^2}\, u. \end{cases}$$

Faßt man diese Gleichungen auf als lineare Differentialgleichungen bezüglich u, v, so genügen ihnen einerseits die Ausdrücke (3.), andererseits, wie man leicht direkt sieht, die Ausdrücke ξ und $p \cdot x$, wenn dieselben an Stelle von u und v in die Gleichungen (4.) gesetzt werden. Die beiden genannten Lösungssysteme fallen aber für $t = t_0$ zusammen. Hieraus schließt man, daß sie für alle t zusammenfallen. Somit haben wir für alle t

$$(5.)\qquad \begin{cases} \xi = \sqrt{\xi^2 + p^2 x^2} \cdot \cos\left[\int_{t_0}^{t} p\,(1-\nu)\,dt + \alpha\right], \\ px = \sqrt{\xi^2 + p^2 x^2} \cdot \sin\left[\int_{t_0}^{t} p\,(1-\nu)\,dt + \alpha\right]. \end{cases}$$

Da $1-\nu > 1-\omega_0$ gilt, so ist $\int_{t_0}^{t} p\,(1-\nu)\,dt$ eine mit t wachsende Größe, welche jeden Wert für *ein* bestimmtes t annimmt. Es gibt daher einen bestimmten Wert T derart, daß $\int_{t_0}^{t_0+T} p\,(1-\nu)\,dt = 2\pi$ wird. Dabei ist $T > 0$, und es gilt für jedes der Bedingung $t_0 < t < t_0 + T$ genügende t

$$0 < \int_{t_0}^{t} p\,(1-\nu)\,dt < 2\pi.$$

II. Wir wollen zwei positive Zahlen h und K der Bedingung

$$(6.)\qquad 1 \geqq \frac{h}{2} + K\left[\frac{1+q}{2q}\sqrt{2N}\cdot\sqrt{h} + \frac{1+p}{p}\cdot\sqrt{2}\right]^2$$

gemäß wählen. Ferner wählen wir ω_0 wie in I gemäß der Bedingung

$$0 < \omega_0 < 1$$

und hierzu wie früher eine entsprechende Umgebung (L_0). Weiter wählen wir eine Umgebung (Π) von $x = \xi = y = \eta = 0$, welche folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Stellen von (Π) liegen in (L_0).

2. Die zweiten Differentialquotienten von R nach den x, ξ, y, η sind für die Stellen von (Π) absolut $\leqq K$ (vgl. § 5).

3. Liegen zwei Bewegungen für alle t in (Π), so gilt stets

$$\sum_{\mu=1}^{N} (u_{\mu 1}^2 + v_{\mu 1}^2) \leqq h(\xi_1^2 + p^2 x_1^2),$$

wobei $u_{\mu 1}, v_{\mu 1}, \xi_1, x_1$ auf die Unterschiede der u_μ, v_μ, ξ, x für gleiche Zeiten bei den beiden Bewegungen hindeuten (vgl. § 22 gegen Anfang). Wir beweisen nunmehr folgenden Satz:

Jede für alle t in (Π) bleibende Bewegung, welche nicht überhaupt durch $x = \xi = y = \eta = 0$ geliefert wird, ist periodisch. Es besteht dabei für die betrachtete Bewegung eine kleinste Periode, welche erhalten wird, wenn man t_0 beliebig wählt und T nach I (gegen Ende) für die betrachtete Bewegung bestimmt.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir zunächst zwei Stellen des Gebietes (Π) ins Auge fassen. Dabei sollen die Koordinaten

$$x, \xi, y_1, y_2, \ldots y_N, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N$$

dieser Stellen mit $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ und $z_1 + \zeta_1, z_2 + \zeta_2, \ldots z_\nu + \zeta_\nu$ bezeichnet werden. Dann gilt

$$R(z_1 + \zeta_1, z_2 + \zeta_2, \ldots z_\nu + \zeta_\nu) - R(z_1, z_2, \ldots z_\nu)$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{\nu} R'_{z_\lambda}(z_1 + \vartheta\zeta_1, z_2 + \vartheta\zeta_2, \ldots z_\nu + \vartheta\zeta_\nu) \cdot \zeta_\lambda,$$

$$R'_{z_\lambda}(z_1 + \vartheta\zeta_1, z_2 + \vartheta\zeta_2, \ldots z_\nu + \vartheta\zeta_\nu)$$
$$= \sum_{\varrho=1}^{\nu} R''_{z_\lambda z_\varrho}(\tau_\lambda(z_1 + \vartheta\zeta_1), \tau_\lambda(z_2 + \vartheta\zeta_2), \ldots \tau_\lambda(z_\nu + \vartheta\zeta_\nu)) \cdot (z_\varrho + \vartheta\zeta_\varrho),$$
$$0 < \vartheta < 1, \qquad 0 < \tau_\lambda < 1, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \nu)$$

$$R(z_1 + \zeta_1, z_2 + \zeta_2, \ldots z_\nu + \zeta_\nu) - R(z_1, z_2, \ldots z_\nu)$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{\nu} \Big(\sum_{\varrho=1}^{\nu} R''_{z_\lambda z_\varrho}(\tau_\lambda(z_1 + \vartheta\zeta_1), \tau_\lambda(z_2 + \vartheta\zeta_2), \ldots \tau_\lambda(z_\nu + \vartheta\zeta_\nu)) \cdot [z_\varrho + \vartheta\zeta_\varrho] \Big) \zeta_\lambda.$$

Hieraus folgt

$$(7.) \quad \left\{ \begin{array}{l} |R(z_1 + \zeta_1, z_2 + \zeta_2, \ldots z_\nu + \zeta_\nu) - R(z_1, z_2, \ldots z_\nu)| \\ \qquad \leqq K \cdot \Big(\sum_{\varrho=1}^{\nu} (|z_\varrho| + |\zeta_\varrho|) \Big) \cdot \Big(\sum_{\lambda=1}^{\nu} |\zeta_\lambda| \Big). \end{array} \right.$$

Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, wählen wir einen t-Wert t_0 und nehmen an, es liege eine Bewegung vor, welche für alle t in (Π) bleibt, ohne immer mit der Stelle $x=\xi=y=\eta=0$ zusammenzufallen. Auf diese Bewegung können die Betrachtungen S. 270, 271 angewandt werden. Es gelten daher für dieselbe die Gleichungen (5.). Wir bestimmen ferner für unsere Bewegung nach S. 271 die Größe T. *Wir behaupten zunächst, daß für die Momente* t_0 *und* t_0+T *die Größe* $\sqrt{\xi^2+p^2x^2}$ *denselben Wert hat.*

In der Tat, wir nehmen versuchsweise an, unsere Behauptung sei nicht richtig. Wir bezeichnen dann den kleineren der von $\sqrt{\xi^2+p^2x^2}$ für t_0 und t_0+T angenommenen Werte mit r, den größeren mit $r+\gamma$ und haben $r>0, \gamma>0$. Ferner sollen die x, ξ, y_μ, η_μ, u_μ, v_μ für den Moment, wo $\sqrt{\xi^2+p^2x^2}$ gleich r ist, mit $x^{(\alpha)}$, $\xi^{(\alpha)}$, $y_\mu^{(\alpha)}$, $\eta_\mu^{(\alpha)}$, $u_\mu^{(\alpha)}$, $v_\mu^{(\alpha)}$ bezeichnet werden, während für den Moment, wo $\sqrt{\xi^2+p^2x^2}$ gleich $r+\gamma$ ist, die Werte der genannten Größen

$$x^{(\alpha)}+x_1^{(\alpha)},\ \xi^{(\alpha)}+\xi_1^{(\alpha)},\ y_\mu^{(\alpha)}+y_{\mu 1}^{(\alpha)},\ \eta_\mu^{(\alpha)}+\eta_{\mu 1}^{(\alpha)},\ u_\mu^{(\alpha)}+u_{\mu 1}^{(\alpha)},\ v_\mu^{(\alpha)}+v_{\mu 1}^{(\alpha)}$$

sein sollen. Dann haben wir nach den Gleichungen (5.)

$$\xi^{(\alpha)}=r\cos\alpha, \qquad px^{(\alpha)}=r\sin\alpha,$$
$$\xi^{(\alpha)}+\xi_1^{(\alpha)}=(r+\gamma)\cos\alpha, \qquad p(x^{(\alpha)}+x_1^{(\alpha)})=(r+\gamma)\sin\alpha$$

und daher

$$(8.) \qquad (\xi_1^{(\alpha)})^2+p^2(x_1^{(\alpha)})^2=\gamma^2.$$

Das Integral der lebendigen Kraft liefert die Beziehung

$$(9.) \quad \begin{cases} (\xi^\alpha)^2+p^2(x^\alpha)^2+\sum_{\mu=1}^{N} u_\mu^\alpha\cdot v_\mu^\alpha+R(x^\alpha,\xi^\alpha,y_\mu^\alpha,\eta_\mu^\alpha)=(\xi^\alpha+\xi_1^\alpha)^2+p^2(x^\alpha+x_1^\alpha)^2 \\ \qquad +\sum_{\mu=1}^{N}(u_\mu^\alpha+u_{\mu 1}^\alpha)(v_\mu^\alpha+v_{\mu 1}^\alpha)+R(x^\alpha+x_1^\alpha,\xi^\alpha+\xi_1^\alpha,y_\mu^\alpha+y_{\mu 1}^\alpha,\eta_\mu^\alpha+\eta_{\mu 1}^\alpha). \end{cases}$$

Wir bemerken nun erstens, daß die von uns betrachtete Bewegung und die für alle t durch $x=\xi=y=\eta=0$ dargestellte Bewegung immer in (Π) bleiben. Also lehrt die Bedingung (3.) S. 272, daß

$$(10.) \qquad \sum_{\mu=1}^{N}[(u_\mu^\alpha)^2+(v_\mu^\alpha)^2]\leqq h[(\xi^\alpha)^2+p^2(x^\alpha)^2].$$

Wir bemerken zweitens: Nimmt man für einen beliebig gewählten Moment einmal ξ^α, x^α, η_μ^α, y_μ^α als Anfangswerte der ξ, x, η_μ, y_μ, sodann

$$\xi^\alpha+\xi_1^\alpha,\ x^\alpha+x_1^\alpha,\ \eta_\mu^\alpha+\eta_{\mu 1}^\alpha,\ y_\mu^\alpha+y_{\mu 1}^\alpha$$

als Anfangswerte, so bleiben die beiden so erhaltenen Bewegungen für alle t in (II). Somit zeigt die Bedingung (3.), S. 272, daß

$$(11.)\qquad \sum_{\mu=1}^{N}[(u_{\mu 1}^{\alpha})^2+(v_{\mu 1}^{\alpha})^2]\leqq h[(\xi_1^{\alpha})^2+p^2(x_1^{\alpha})^2].$$

Indem wir die allgemeine Beziehung

$$\Big|\sum_{\lambda=1}^{m}(a_\lambda b_\lambda)\Big|\leqq\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{m}a_\lambda^2}\cdot\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{m}b_\mu^2}$$

benutzen, erhalten wir

$$(12.)\quad\begin{cases}\Big|\sum\limits_{\mu=1}^{N}(u_\mu^{\alpha}+u_{\mu 1}^{\alpha})(v_\mu^{\alpha}+v_{\mu 1}^{\alpha})-\sum\limits_{\mu=1}^{N}u_\mu^{\alpha}\cdot v_\mu^{\alpha}\Big|\leqq\Big|\sum\limits_{\mu=1}^{N}(u_\mu^{\alpha}v_{\mu 1}^{\alpha}+v_\mu^{\alpha}u_{\mu 1}^{\alpha})\Big|+\sum\limits_{\mu=1}^{N}|u_{\mu 1}^{\alpha}|\cdot|v_{\mu 1}^{\alpha}|\\ \qquad\leqq\sqrt{\sum\limits_{\mu=1}^{N}[(u_\mu^{\alpha})^2+(v_\mu^{\alpha})^2]}\cdot\sqrt{\sum\limits_{\mu=1}^{N}[(u_{\mu 1}^{\alpha})^2+(v_{\mu 1}^{\alpha})^2]}+\frac{1}{2}\sum\limits_{\mu=1}^{N}[(u_{\mu 1}^{\alpha})^2+(v_{\mu 1}^{\alpha})^2]\\ \leqq\sqrt{h[(\xi^{\alpha})^2+p^2(x^{\alpha})^2]}\cdot\sqrt{h[(\xi_1^{\alpha})^2+p^2(x_1^{\alpha})^2]}+\frac{h}{2}[(\xi_1^{\alpha})^2+p^2(x_1^{\alpha})^2]=hr\gamma+\frac{h}{2}\gamma^2.\end{cases}$$

Wir haben ferner mit Rücksicht auf (7.)

$$\begin{aligned}&|R(x^{\alpha}+x_1^{\alpha},\,\xi^{\alpha}+\xi_1^{\alpha},\,y_\mu^{\alpha}+y_{\mu 1}^{\alpha},\,\eta_\mu^{\alpha}+\eta_{\mu 1}^{\alpha})-R(x^{\alpha},\,\xi^{\alpha},\,y_\mu^{\alpha},\,\eta_\mu^{\alpha})|\\ \leqq K[&|\xi^{\alpha}|+|\xi_1^{\alpha}|+|x^{\alpha}|+|x_1^{\alpha}|\\ &+\sum_{\mu=1}^{N}(|y_\mu^{\alpha}|+|y_{\mu 1}^{\alpha}|+|\eta_\mu^{\alpha}|+|\eta_{\mu 1}^{\alpha}|)]\cdot[|\xi_1^{\alpha}|+|x_1^{\alpha}|+\sum_{\mu=1}^{N}(|y_{\mu 1}^{\alpha}|+|\eta_{\mu 1}^{\alpha}|)].\end{aligned}$$

Nun ist wegen (10.), (11.), (8.)

$$|\xi^{\alpha}|+|x^{\alpha}|\leqq(|\xi^{\alpha}|+p|x^{\alpha}|)\frac{1+p}{p}\leqq\frac{1+p}{p}\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\xi^{\alpha})^2+p^2(x^{\alpha})^2}=\frac{1+p}{p}\sqrt{2}\cdot r,$$

$$|\xi_1^{\alpha}|+|x_1^{\alpha}|\leqq\frac{1+p}{p}\sqrt{2}\sqrt{(\xi_1^{\alpha})^2+p^2(x_1^{\alpha})^2}=\frac{1+p}{p}\sqrt{2}\cdot\gamma,$$

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{N}(|y_\mu^{\alpha}|+|\eta_\mu^{\alpha}|)&\leqq\sum_{\mu=1}^{N}\frac{1+q}{2q}(|u_\mu^{\alpha}|+|v_\mu^{\alpha}|)\\ &\leqq\frac{1+q}{2q}\sqrt{2N}\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N}((u_\mu^{\alpha})^2+(v_\mu^{\alpha})^2)}\leqq\frac{1+q}{2q}\sqrt{2N}\sqrt{h}\cdot r,\end{aligned}$$

$$\sum_{\mu=1}^{N}(|y_{\mu 1}^{\alpha}|+|\eta_{\mu 1}^{\alpha}|)\leqq\frac{1+q}{2q}\sqrt{2N}\sqrt{\sum_{\mu=1}^{N}((u_{\mu 1}^{\alpha})^2+(v_{\mu 1}^{\alpha})^2)}\leqq\frac{1+q}{2q}\sqrt{2N}\sqrt{h}\cdot\gamma.$$

Also

$$(13.)\quad\begin{cases}|R(x^{\alpha}+x_1^{\alpha},\,\xi^{\alpha}+\xi_1^{\alpha},\,y_\mu^{\alpha}+y_{\mu 1}^{\alpha},\,\eta_\mu^{\alpha}+\eta_{\mu 1}^{\alpha})-R(x^{\alpha},\,\xi^{\alpha},\,y_\mu^{\alpha},\,\eta_\mu^{\alpha})|\\ \qquad\leqq K\cdot\Big[\frac{1+p}{p}\sqrt{2}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{2N}\cdot\sqrt{h}\Big]^2(r+\gamma)\gamma.\end{cases}$$

Wir haben ferner

$$(14.)\quad (\xi^a+\xi_1^a)^2+p^2(x^a+x_1^a)^2-[(\xi^a)^2+p^2(x^a)^2]=(r+\gamma)^2-r^2=2r\gamma+\gamma^2.$$

Mit Rücksicht auf (14.), (12.), (13). erhalten wir aus (9).

$$2r\gamma+\gamma^2\leqq hr\gamma+\frac{h}{2}\gamma^2+K\Big[\frac{1+p}{p}\sqrt{2}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{2N}\cdot\sqrt{h}\Big]^2(r+\gamma)\gamma$$

$$<hr\gamma+\frac{h}{2}\gamma^2+K\Big[\frac{1+p}{p}\sqrt{2}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{2N}\cdot\sqrt{h}\Big]^2(2r+\gamma)\gamma.$$

Hieraus folgt

$$1<\frac{h}{2}+K\Big[\frac{1+p}{p}\sqrt{2}+\frac{1+q}{2q}\sqrt{2N}\cdot\sqrt{h}\Big]^2.$$

Dies widerspricht aber (6.). Somit müssen wir die S. 273 versuchsweise gemachte Annahme fallen lassen. *Also nimmt für die Momente t_0 und t_0+T die Größe $\sqrt{\xi^2+p^2x^2}$ denselben Wert an. Aus (5.) folgt dann, daß die Werte von ξ und x für die Momente t_0 und t_0+T dieselben sind.*

Wir wählen nunmehr einen Zeitmoment $t=\tau$ beliebig aus. Sodann fassen wir zwei Bewegungen ins Auge, die man erhält, wenn man einmal als Anfangswerte der x, ξ, y_μ, η_μ für $t=\tau$ diejenigen Werte nimmt, die diese Größen bei der von uns im Vorhergehenden betrachteten Bewegung für $t=t_0$ haben, andererseits als Anfangswerte der x, ξ, y_μ, η_μ für $t=\tau$ diejenigen Werte, die diese Größen bei der genannten Bewegung für $t=t_0+T$ haben. Beide Bewegungen liegen für alle t in (Π). Die Bedingung (3.) S. 272 lehrt somit, daß für die zwei Bewegungen im Momente $t=\tau$

$$\sum_{\mu=1}^{N}(u_{\mu 1}^2+v_{\mu 1}^2)\leqq h(\xi_1^2+p^2x_1^2)$$

gilt. Aus dem eben Bewiesenen folgt aber für $t=\tau$ $\xi_1=x_1=0$. Also haben wir für $t=\tau$

$$u_{\mu 1}=v_{\mu 1}=0. \qquad (\mu=1,2,\dots N)$$

Hieraus schließen wir, daß die Größen $u_\mu, v_\mu\ (\mu=1,2,\dots N)$ für $t=\tau$ bei beiden Bewegungen dieselben sind. Hieraus folgt, daß auch die Größen $y_\mu, \eta_\mu\ (\mu=1,2,\dots N)$ für $t=\tau$ bei beiden Bewegungen dieselben sind. *Damit ist bewiesen, daß bei der von uns im Vorhergehenden betrachteten Bewegung nicht nur die ξ, x für $t=t_0+T$ dieselben Werte annehmen wie für $t=t_0$, sondern daß das gleiche auch von den $y_\mu, \eta_\mu\ (\mu=1,2,\dots N)$ gilt. Die be-*

trachtete Bewegung ist also periodisch mit der Periode T. Daß T die kleinste Periode ist, geht aus (5.) und den Betrachtungen S. 271 unmittelbar hervor.

Wir haben (vergl. S. 270, 271)

$$\int_{t_0}^{t_0+T} p\,(1-\nu)\,dt = 2\pi, \quad |\nu| < \omega_0,$$

folglich

$$p\,(1-\sigma)\cdot T = 2\pi, \quad |\sigma| < \omega_0.$$

Hieraus folgt leicht, daß die Periode T sich von $\frac{2\pi}{p}$ weniger unterscheidet als um $\frac{2\pi}{p}\cdot\frac{\omega_0}{1-\omega_0}$. Diese letztere Größe kann aber kleiner als eine beliebig gewählte positive Zahl gemacht werden, indem man die positive Zahl ω_0 (vergl. S. 271) genügend klein wählt. Wir haben somit folgenden Satz bewiesen.

Man kann eine Umgebung von $x=\xi=y=\eta=0$ angeben von der Beschaffenheit, daß sämtliche für alle t in derselben bleibende Bewegungen periodisch sind. Eine jede dieser Bewegungen (wir schließen diejenige aus, für welche stets $x=\xi=y=\eta=0$ gilt) besitzt eine kleinste Periode und man kann die Umgebung so wählen, daß alle kleinsten Perioden der genannten Bewegungen sich von $\frac{2\pi}{p}$ beliebig wenig unterscheiden.

Berücksichtigt man § 17, so kann man noch folgenden Satz aussprechen:

Man kann eine solche Umgebung von $x=y_1=y_2=\cdots=y_N=0$ angeben, daß sämtliche Bewegungen, die für alle t in dieser Umgebung bleiben, periodisch verlaufen. Jede der genannten Bewegungen mit Ausnahme derjenigen, für welche immer $x=y_\mu=0$ gilt, besitzt eine kleinste Periode. Man kann die Umgebung so wählen, daß diese Perioden sich von $\frac{2\pi}{p}$ beliebig wenig unterscheiden.

Forms for the *Abelian* Integrals of the three kinds in the case of a curve for which the tangents at the multiple points are distinct from one another.*)

(By Mr. *J. C. Fields*, of Toronto, Canada.)

§ 1.

Let

$$F(z, u) = \sum_{r,s} e_{r,s} z^r u^s = 0 \tag{1.}$$

be the equation to an irreducible algebraic curve of degree n. The form of this curve we shall suppose to be the same as that with which we have had to do in a paper in a recent number of this journal.**) Namely we shall suppose that the tangents at the multiple points are distinct from one another, that these points are not at the same time branch points, that no line parallel to the axis of u includes more than one point of the nature of a branch or multiple point, and furthermore that the asymptotes are all distinct from one another and none of them parallel to the axis of u and no two parallel to each other.

The branch points here in question, it is to be understood, are those which present themselves when u is regarded as the independent variable. It is also to be remarked that on the above hypotheses the coefficient $e_{0,n}$ of u^n will have a value different from 0.

*) The substance of the present paper was presented at a meeting of the Royal Society of Canada held in Toronto on May 29th, 1902.

**) The *Riemann-Roch* Theorem and the Independence of the Conditions of Adjointness in the case of a curve for which the tangents at the multiple points are distinct from one another. This journal, t. 124, p. 179—201.

In the present paper I purpose to utilize the method developed in the paper just cited, to obtain forms for the general *Abelian* integral of the first kind and for the elementary *Abelian* integrals of the second and third kinds. In the particular case where all the multiple points of the curve happen to be double points, my results accord with those which in this case *Christoffel* has obtained by another method.*)

§ 2.

In the paper referred to above we have indicated the δ multiple points of our curve by $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_\delta, b_\delta)$ and have supposed the orders of their multiplicities to be $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_\delta$ respectively.

On indicating by $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$ any Q points of the curve other than multiple points or points at ∞, we have seen that the most general rational function of z, u which becomes infinite to the first order at each of these points and is elsewhere finite excepting at ∞, may be expressed in the form

$$(2.) \qquad \sum_1^{\delta+Q} {}_\lambda \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + \tau(z, u)$$

where $\tau(z, u)$ is an arbitrary polynomial in z, u and where

$$(3.) \qquad \gamma_\lambda = \sum_0^{\sigma_\lambda - 2} {}_s \sum_0^{\sigma_\lambda - s - 2} {}_r \; c_{r,s,\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^s$$

is a symbolic operator involving $\frac{1}{2}\sigma_\lambda(\sigma_\lambda - 1)$ arbitrary coefficients if the corresponding point (a_λ, b_λ) be a multiple point, while in the case of an ordinary point or a branch point γ_λ represents an arbitrary constant.

We have determined the conditions under which a function of the form (2.) remains finite at ∞. In the first place we saw that the degree of the polynomial $\tau(z, u)$ cannot be greater than $n-2$. Indicating this by the suffix $n-2$ and writing

$$(4.) \qquad \tau_{n-2} = \sum_2^n {}_s \sum_0^{-2} {}_r \, c_{n-s+r, n-s} \, z^r \, u^{n-s}$$

we found it convenient to express our function in the form

*) Annali di Matematica, ser. 2, t. X. pp. 80—100. See also *Brill* und *Noether*, Bericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung III, 1894.

$$(5.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda \dfrac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + \tau_{n-2}(z, u) \\ \qquad = \sum_{1}^{n}{}_{s} \sum_{-(n-s-1)}^{s-2}{}_{r}\, c_{n-s+r,\,n-s}\, z^r\, u^{n-s} + c_{(0)} + P(z, u) \end{array} \right.$$

where $P(z, u)$ is a rational function which is finite for $z = \infty$. Here the polynomial $\tau_{n-2}(z, u)$ on the left accounts for the constant $c_{(0)}$ and for those terms in the double summation on the right in which the exponent r of z is 0 or has a positive value, and the rest of the expression on the right is equivalent to the summation on the left.

The identity (5.) we have also written in the form

$$(6.)\quad \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + \tau_{n-2}(z, u) = \sum_{1}^{n-2}{}_{\mu}\, z^{-\mu}\, p_\mu(z, u) + c_{(0)} + P(z, u)$$

where the functions $p_\mu(z, u)$ are homogeneous polynomials of degree $n-1$, and where we have in particular

$$(7.)\qquad p_\mu(z, u) = \sum_{1}^{n}{}_{s}\, c_{n-1-\mu,\,n-s}\, z^{s-1}\, u^{n-s}.$$

In the paper referred to we have supposed our function to be represented in the form on the right of (6.), and have seen that in order that it may not become infinite at ∞ the coefficients c in the $n-2$ polynomials $p_1(z, u), \ldots p_{n-2}(z, u)$ must all vanish. As a consequence the polynomial $\tau_{n-2}(z, u)$ reduces to an arbitrary constant $c_{0,0}$ and certain relations hold between the operators γ_λ. These relations we obtained on connecting the operators γ_λ with the coefficients c by the two systems of equations

$$\sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^z = \gamma_{i\varkappa}, \qquad (i+\varkappa = 0, 1, 2, \ldots n-3)$$

$$\sum_{0}^{s-1}{}_{\sigma} \sum_{0}^{\sigma}{}_{\varrho}\, e_{\varrho,\,n-\sigma}\, \gamma_{r-1+\beta,\,s-1-\sigma} = c_{n-s-r,\,n-s} \qquad (r = 1, \ldots n-s-1;\ s = 1, \ldots n-2)$$

and substituting 0 for the constants c in these equations. Here the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ are auxiliary quantities introduced for convenience and defined by the first of these two systems of equations.

We found that the $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ here in question all have the value 0, and on substituting for them this value we obtained the set of $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ equations

$$\sum_{0}^{\delta+Q}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = 0 \qquad (i+\varkappa = 0, 1, \ldots n-3)$$

which must be satisfied by the operators γ_λ in the case where our function is finite for $z = \infty$.

§ 3.

More generally we may employ the same method to determine the conditions that must be satisfied by the coefficients of our function, not only in the case where it is to remain finite at ∞ but also where it is required to take the value 0 for any or all of the branches at ∞, and where the zeros in question may be of any assigned orders. The case too is not excluded in which the function is allowed to possess certain assigned infinities at ∞.

On referring to § 8 of the paper already cited namely we readily see that we can write

$$(8.)\quad \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda\, \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + \tau(z,u) = \sum_{-h}^{m}{}_{\mu}\, z^{-\mu}\, p_\mu(z,u) + P_m(z,u)$$

where m may be taken as large as we like, and where $P_m(z,u)$ is zero to the order $m-n+2$ for each of the branches at ∞. Here the degree of the polynomial $\tau(z,u)$ may be greater than $n-2$ and may be represented by $h+n-1$ and the polynomial itself will have the form

$$(9.)\qquad \tau(z,u) = \sum_{1}^{n}{}_{s}\ \sum_{0}^{h+s-1}{}_{r}\ c_{n-s+r,\,n-s}\, z^r\, u^{n-s}.$$

Also, as before, the polynomials $p_\mu(z,u)$ may be supposed to be represented as in formula (7.).

Here too, on introducing a system of auxiliary quantities $\gamma_{i,\varkappa}$, we shall have the two systems of equations

$$(10.)\qquad \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = \gamma_{i,\varkappa},$$

$$(11.)\qquad \sum_{0}^{s-1}{}_{\sigma}\ \sum_{0}^{\sigma}{}_{\varrho}\, e_{\varrho,\,n-\sigma}\, \gamma_{r-1+\varrho,\,s-1-\sigma} = c_{n-s-r,\,n-s}.$$

The equations of the former of these two systems define the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ in terms of the quantities involved in the operators γ_λ, for all zero and positive integer values of the suffixes $i, \varkappa$. The equations of the latter

system give the coefficients $c_{n-s-r,n-s}$ in terms of the quantities $\gamma_{i,x}$ for all positive integer values of r and for the values $s = 1, 2, \ldots n$. These coefficients $c_{n-s-r,n-s}$, it is to be remembered, correspond to terms of the functions $z^{-\mu} p_\mu(z,u)$ in which the exponent of z is negative and are consequently distinct from the coefficients $c_{n-s+r,n-s}$ which appear in the polynomial $\tau(z,u)$.

Suppose now that our function (8.) is required to satisfy certain conditions at ∞ which are given by linear equations in the coefficients c — in the coefficients $c_{n-s+r,n-s}$ of the polynomial $\tau(z,u)$ as well as in the coefficients $c_{n-s-r,n-s}$ which appear in the equations (11.). — We obtain the equivalent equations of condition in terms of the coefficients of our function, as expressed in the form on the left of (8.), on substituting in the given equations of condition for the coefficients $c_{n-s-r,n-s}$ their expressions in terms of the quantities $\gamma_{i,x}$ given by the equations (11.), and thereafter for the quantities $\gamma_{i,x}$ the expressions given by the equations (10.). Namely we so obtain the equations of condition which must be satisfied by the coefficients $c_{n-s+r,n-s}$ of the polynomial $\tau(z,u)$ and the coefficients which appear in the operators γ_i.

The general remarks immediately preceding may be regarded as supplemental to the paper on the *Riemann-Roch* Theorem, to which we have referred above. In the paper in question namely we proved the *Riemann-Roch* Theorem for the case of a set of infinities corresponding to finite values of the variable z. The method however is also applicable in the case where our set of infinities includes infinities at ∞. If for example, in addition to the infinities corresponding tho the Q finite points

$$(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q}),$$

our function may have an infinity of the first order corresponding to a given one of the branches at ∞, its expression as given in (8.) will reduce to the form

$$(12.) \qquad \sum_1^{\delta+Q} \lambda \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + \tau_1(z,u) = z^{-(n-2)} p_{n-2}(z,u) + P_{n-2}(z,u)$$

where $\tau_1(z,u)$ is of degree 1 in z, u and $P_{n-2}(z,u)$ a function which is finite for $z = \infty$. For the case here in question the systems of equations (10.) and (11.) will be

$$\sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = \gamma_{i,\varkappa}, \qquad (i+\varkappa=0,1,\dots n-3)$$

$$\sum_{0}^{s-1}{}_{\sigma} \sum_{0}^{\sigma}{}_{\varrho}\, e_{\varrho,n-\sigma}\, \gamma_{r-1+\varrho,\, s-1-\sigma} = c_{n-s-r,\,n-s}. \qquad (r=1,2,\dots n-s-1;\ s=1,2,\dots n-2)$$

The conditions which must be satisfied by the coefficients c are obtained on choosing the coefficients $c_{1,0}, c_{1,1}, \dots c_{1,n-1}$ in the function $z^{-(n-2)}\, p_{n-2}(z,u)$ in such manner that this function may be finite for all the branches at ∞ with the exception of the one branch to which the infinity at ∞ is to correspond, and on equating to 0 all the coefficients $c_{n-s-r,n-s}$ in the system of equations above in which the first suffix has a value other than 1. With this determination of the coefficients c, there is no difficulty in solving the latter of the two systems of equations above for the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$. On substituting the values so found in the former of the two systems of equations, we obtain a system of equations whose interpretation offers no difficulty and accords with the ordinary statement of the *Riemann-Roch* Theorem, the infinities in this case being $Q+1$ in number and including among them an infinity at ∞.

§ 4.

For the purposes of the present paper it will suffice to consider the case in which the function represented in (8.) is zero to the second order for each of the n branches at ∞.

Writing the function in the form

$$(13.)\quad \begin{cases} \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda \dfrac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} + \tau_{n-2}(z,u) \\ \qquad = z^{-1}\, p_1(z,u) + z^{-2}\, p_2(z,u) + \cdots + z^{-n}\, p_n(z,u) + P_n(z,u) \end{cases}$$

where the function $P_n(z,u)$ is zero to the second order for each of the branches at ∞, the polynomials $p_1(z,u), \dots p_n(z,u)$ must evidently all vanish identically. As a consequence the polynomial $\tau_{n-2}(z,u)$ must also vanish identically and we shall furthermore have

$$(14.)\qquad c_{n-s-r,\,n-s} = 0. \qquad (r=1,2,\dots n-s+1;\ s=1,2,\dots n$$

For the case here in question then, the systems of equations (10.) and (11.) will be

$$(15.)\qquad \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda}\, \gamma_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = \gamma_{i,\varkappa}, \qquad (i+\varkappa=0,\dots n-1)$$

$$(16.) \qquad \sum_{0}^{s-1}{}_{\sigma} \sum_{0}^{\sigma}{}_{\varrho}\, e_{\varrho,\, n-\sigma}\, \gamma_{r-1+\varrho,\, s-1-\sigma} = 0. \qquad (r=1,2,\ldots n-s+1;\ s=1,2,\ldots n)$$

It is evident that all the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ which appear in the system of equations (16.) are ones in which the sum of the suffixes is equal to or less than $n-1$. It is furthermore evident that all such quantities actually present themselves, and on putting $\varrho=0$, $\sigma=0$ and considering the various pairs of values r, s in question, it is apparent that each of them presents itself in some one of the equations with $e_{0,n}$ as coefficient.

In connection with the *Riemann-Roch* Theorem it was proved that the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ appearing in the $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ equations

$$\sum_{0}^{s-1}{}_{\sigma} \sum_{0}^{\sigma}{}_{\varrho}\, e_{\varrho,\, n-\sigma}\, \gamma_{r-1+\varrho,\, s-1-\sigma} = 0 \qquad (r=1,2,\ldots n-s-1;\ s=1,2,\ldots n-2)$$

all have the value 0, that is that we have

$$\gamma_{i,\varkappa} = 0. \qquad (i+\varkappa=0,\ 1,\ \ldots n-3)$$

Of the equations in the system (16.) then, we still have to consider only those equations which correspond to the values

$$r=n-s, \qquad s=1,2,\ldots n-1;$$
$$r=n-s+1, \quad s=1,2,\ldots n.$$

Now in the equations

$$\sum_{0}^{s-1}{}_{\sigma} \sum_{0}^{\sigma}{}_{\varrho}\, e_{\varrho,\, n-\sigma}\, \gamma_{r-1+\varrho,\, s-1-\sigma} = 0 \qquad (r=n-s;\ s=1,2,\ldots n-1)$$

the maximum sum of the suffixes in a quantity $\gamma_{r-1+\varrho,\, s-1-\sigma}$ is $r+s-2=n-2$. This maximum evidently presents itself only in the single term $e_{0,n}\gamma_{r-1,\, s-1}$ corresponding to the values $\varrho=0$, $\sigma=0$, and, since for $i+\varkappa<n-2$ we have $\gamma_{i,\varkappa}=0$, it follows that the $n-1$ equations here in question reduce to the set of equations

$$e_{0,n}\gamma_{r-1,\, s-1} = 0 \qquad (r=n-s;\ s=1,2,\ldots n-1)$$

whence it follows that we have

$$\gamma_{r-1,\, s-1} = 0 \qquad (r=n-s;\ s=1,2,\ldots n-1)$$

and the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ in which the sum of the suffixes has the value $n-2$ are therefore all equal to 0.

In like manner in the equations

$$\sum_{0}^{s-1}{}_{\sigma} \sum_{0}^{\sigma}{}_{\varrho} e_{\varrho, n-\sigma} \gamma_{r-1+\varrho, s-1-\sigma} = 0 \qquad (r=n-s+1; s=1,2,\ldots n)$$

the maximum sum of the suffixes in a quantity $\gamma_{r-1+\varrho, s-1-\sigma}$ is $r+s-2=n-1$. Such maximum corresponds to the pair of values $\varrho=0$, $\sigma=0$ only, and, since for $i+\varkappa<n-1$ we have $\gamma_{i,\varkappa}=0$, the n equations here in question reduce to the set of n equations

$$e_{0,n} \gamma_{r-1, s-1} = 0. \qquad (r=n-s+1; s=1,2,\ldots n)$$

We have as a consequence

$$\gamma_{r-1, s-1} = 0 \qquad (r=n-s+1; s=1,2,\ldots n)$$

and the quantities $\gamma_{i,\varkappa}$ in which the sum of the suffixes has the value $n-1$ are therefore all equal to 0.

From the equations (16.) then it follows that we have

$$\gamma_{i,\varkappa} = 0 \qquad (i+\varkappa=0,1,\ldots n-1)$$

and our system of equations (15.) consequently reduces to

$$(17.) \qquad \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda} \gamma_\lambda a_\lambda^i b_\lambda^\varkappa = 0. \qquad (i+\varkappa=0,1,\ldots n-1)$$

The most general function of the form (8.) which is zero to the second order for each of the n branches at ∞ will therefore take the form

$$(18.) \qquad \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda} \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)}$$

where the constants involved in the operators γ_λ satisfy the conditions implied in the equations (17.). This then is the form of the most general rational function of z, u which is zero to the second order for each of the n branches at ∞ and whose infinities, all of the first order, correspond to ones among the Q points $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$.

In like manner it may be proved that the most general rational function of z, u which is zero to the order t for each of the n branches at ∞, and whose infinities are included among the Q infinities here in question, is represented by this same form (18.) subject to the conditions

$$(19.) \qquad \sum_{1}^{\delta+Q}{}_{\lambda} \gamma_\lambda a_\lambda^i b_\lambda^\varkappa = 0. \qquad (i+\varkappa=0,1,\ldots n+t-3; \varkappa=0,1,\ldots n-1)$$

§ 5.

If the Q points $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots (a_{\delta+Q}, b_{\delta+Q})$ constitute the aggregate of the branch points of our curve and if these are all simple branch points, the expression (18.) subject to the conditions (17.) will evidently represent the most general rational function whose integral is everywhere finite. If however cycles of more than two branches correspond to certain of the branch points, we shall have to extend the significance of the operators γ_λ in the case of these points before the expression (18.) represents the most general function of the character in question. We have supposed namely in the preceding, that an operator γ_λ corresponding to other than a multiple point is a constant. In the case where a cycle of ν_λ branches corresponds to a branch point (a_λ, b_λ) we shall now take

$$\gamma_\lambda = \sum_0^{\nu_\lambda - 2} {}_s \; c_{s,\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^s \tag{20.}$$

where the coefficients $c_{s,\lambda}$ are constants.

With the operators γ_λ defined as in (3.) and (20.) respectively for the multiple points and the branch points of our curve, it is readily seen that the expression (18.) subject to the conditions (17.) represents the most general rational function whose integral is everywhere finite. Such function namely must be zero to the order 2 for each of the n branches at ∞ and can only possess infinities corresponding to branch points, an infinity being at most of the $(\nu_\lambda - 1)^{\text{th}}$ order in the case of a branch point (a_λ, b_λ) whose cycle is made up of ν_λ branches. Any such infinity can evidently be accounted for by an element of the form

$$\gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)}$$

where γ_λ is defined as in (20.). Our function whose integral is to remain everywhere finite must therefore have the form (13.), subject to the conditions necessary to insure that it be zero to the second order for each of the n branches at ∞. The function will therefore also have the form (18.) subject to the conditions (17.), as we see on following the same course of reasoning as before, for the validity of our reasoning in the preceding depended on the single fact that in the element

$$\gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)}$$

we could divide through by $u-b_\lambda$ before effecting the operation with γ_λ, or, what is the same thing, that we had

$$\gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u) - F(a_\lambda, b_\lambda)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)}.$$

This however holds good in the case of the operators γ_λ defined in (20.) as well as in the case of those corresponding to the multiple points, for in the case of a branch point (a_λ, b_λ) whose cycle numbers ν_λ branches we have

$$F^{(s)}_{b_\lambda}(a_\lambda, b_\lambda) = 0 \qquad (s=0, 1, \ldots \nu_\lambda - 1)$$

and therefore

$$\gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, b_\lambda)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = 0.$$

Denoting the number of the branch points of our curve by $\bar{\delta}$ and indicating the $\bar{\delta}$ points in question by $(a_{\delta+1}, b_{\delta+1}), \ldots (a_{\delta+\bar{\delta}}\, b_{\delta+\bar{\delta}})$ respectively, we shall evidently have for the general *Abelian* integral of the first kind, the form

$$(21.) \qquad \int \sum_1^{\delta+\bar{\delta}} {}_\lambda \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} dz$$

where the summation is extended to all the multiple points and branch points of the curve, the operators γ_λ being defined as in (3.) and (20.) and subject to the system of conditions

$$(22.) \qquad \sum_1^{\delta+\bar{\delta}} {}_\lambda \gamma_\lambda a_\lambda^i b_\lambda^\varkappa = 0. \qquad (i+\varkappa = 0, 1, \ldots n-1)$$

The number of arbitrary constants involved in the solutions of this system of equations, will be equal to the difference between the total number of the constants involved in the expressions for the operators γ_λ and the number of the equations which are linearly independent of one another.

To determine the number of these linearly independent equations, we may proceed as follows.—Multiply the expressions on the left-hand side of the $\frac{1}{2}n(n+1)$ equations (22.) by as many arbitrary multipliers $\beta_{i,\varkappa}$ and add. We obtain for sum

$$(23.) \qquad \sum_{i+\varkappa \leqq n-1} \sum_1^{\delta+\bar{\delta}} {}_\lambda \gamma_\lambda \beta_{i,\varkappa} a_\lambda^i b_\lambda^\varkappa.$$

On equating to 0 separately in this sum the coefficient of each of the constants c involved in the expression of the operators γ_λ, we obtain a number

of equations of condition which must be satisfied by the quantities $\beta_{i,\varkappa}$, and the number of these equations of condition which are independent of one another will evidently also be the number of the equations (22.) which are independent of one another.

Now the equations of condition which must be satisfied by the quantities $\beta_{i,\varkappa}$ are evidently the equations of the two systems

$$(24.) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^s \sum_{i+\varkappa \leqq n-1} \beta_{i,\varkappa}\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = 0, \qquad (r+s=0,1,\dots\sigma_\lambda-2;\ \lambda=1,2,\dots\delta)$$

$$(25.) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^s \sum_{i+\varkappa \leqq n-1} \beta_{i,\varkappa}\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = 0. \qquad (s=0,1,\dots\nu_\lambda-2;\ \lambda=\delta+1,\dots\delta+\bar{\delta})$$

The equations of the former of these two systems correspond to the multiple points and the equations of the latter system to the branch points of our curve. Those equations of the system (24.) corresponding to a given point (a_λ, b_λ) express that the function

$$G(z,u) = \sum_{i+\varkappa \leqq n-1} \beta_{i,\varkappa}\, z^i\, u^\varkappa$$

must possess a zero of the order $\sigma_\lambda - 1$ for each of the σ_λ branches of our curve passing through this point, and those equations of the system (25.) corresponding to a given point (a_λ, b_λ) express that the function has $\nu_\lambda - 1$ zeros at this point. The aggregate of the zeros here in question however constitutes precisely the system of zeros of the function $F_u'(z,u)$, and since this function is infinite to the order $n-1$ for each of the branches at ∞ it follows that the quotient of the function $G(z,u)$ by the function $F_u'(z,u)$ is nowhere infinite and must therefore be a constant.

The systems of equations (24.) and (25.) then determine the function $G(z,u)$ to a constant factor and are therefore equivalent to $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ linearly independent equations, since this is just one less than the number of terms in the general polynomial in (z,u) of degree $n-1$. The number of the equations (22.) in the coefficients of the operators γ_λ which are linearly independent of one another is therefore also $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ and happens to be just one less than the total number of these equations. Furthermore for the total number of the coefficients involved in the operators γ_λ we have

$$\sum_1^\delta{}_\lambda \frac{1}{2}\sigma_\lambda(\sigma_\lambda-1) + \sum_{\delta+1}^{\delta+\bar{\delta}}{}_\lambda (\nu_\lambda - 1)$$

as we see on referring to the expressions for these operators given in (3.) and (20.). On subtracting from this number the number of the equations (22.) which are linearly independent of one another, we obtain for the number of the arbitrary constants involved in the solutions of the equations the expression

$$\sum_1^{\delta}{}_\lambda \frac{1}{2}\sigma_\lambda(\sigma_\lambda - 1) + \sum_{\delta+1}^{\delta+\bar{\delta}}{}_\lambda (\nu_\lambda - 1) - \frac{1}{2}n(n+1) + 1.$$

This then is the number of arbitrary coefficients involved in the expression (21.) for the general *Abelian* integral of the first kind, or in other words this is the number of the linearly independent integrals of the first kind.

Now the number of infinities of the function $F'_u(z, u)$ is $n(n-1)$ and the number of its zeros as we have seen in the foregoing is

$$\sum_1^{\delta}{}_\lambda \sigma_\lambda(\sigma_\lambda - 1) + \sum_{\delta+1}^{\delta+\bar{\delta}}{}_\lambda (\nu_\lambda - 1).$$

The number of zeros of a rational function of (z, u) however is equal to the number of its infinities and we therefore have

$$\sum_1^{\delta}{}_\lambda \sigma_\lambda(\sigma_\lambda - 1) + \sum_{\delta+1}^{\delta+\bar{\delta}}{}_\lambda (\nu_\lambda - 1) = n(n-1).$$

For the number of the linearly independent integrals of the first kind we consequently have

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum_1^{\delta}{}_\lambda \frac{1}{2}\sigma_\lambda(\sigma_\lambda - 1)$$

and this is the expression which was obtained for the genus of our curve in the paper on the *Riemann-Roch* Theorem. The number of linearly independent integrals of the first kind then is p, the genus of our curve, and the form of the general integral is that given by formula (21.) subject to the equations of condition (22.).

§ 6.

Suppose now that the points (a_λ, b_λ) in the form (18.) are $\delta + \bar{\delta} + 1$ in number, consisting of the multiple points, the branch points, and an additional point $(a_{\delta+\bar{\delta}+1}, b_{\delta+\bar{\delta}+1})$. For the corresponding system of equations (17.) we then have

$$(26.) \qquad \sum_{1}^{\delta+\bar{\delta}+1\lambda} \gamma_\lambda a_\lambda^i b_\lambda^\varkappa = 0 \cdot \qquad (i+\varkappa = 0, 1, \ldots n-1)$$

These $\frac{1}{2}n(n+1)$ equations in the coefficients of the operators γ_λ are all linearly independent of one another, as we see on regarding the system of equations

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_\lambda}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^s \sum_{i+\varkappa \leqq n-1} \beta_{i,\varkappa}\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = 0\,, \qquad (r+s=0, 1, \ldots \sigma_\lambda - 2;\ \lambda = 1, 2, \ldots \delta)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^s \sum_{i+\varkappa \leqq n-1} \beta_{i,\varkappa}\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = 0\,, \qquad (s=0, 1, \ldots \nu_\lambda - 2;\ \lambda = \delta+1, \ldots \delta+\bar{\delta})$$

$$\sum_{i+\varkappa \leqq n-1} \beta_{i,\varkappa}\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = 0. \qquad (\lambda = \delta+\bar{\delta}+1)$$

The equations of this system namely require that in addition to the zeros of the function $F'_u(z, u)$, the polynomial

$$G(z, u) = \sum_{i+\varkappa \leqq n-1} \beta_{i,\varkappa}\, z^i\, u^\varkappa$$

possess also as zero the point $(a_{\delta+\bar{\delta}+1}, b_{\delta+\bar{\delta}+1})$, what is impossible unless the polynomial vanish identically, since it is a constant multiple of the function $F'_u(z, u)$.

Because all of the $\frac{1}{2}n(n+1)$ equations in (26.) are linearly independent of one another whereas only $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ of the $\frac{1}{2}n(n+1)$ equations (22.) are linearly independent, it evidently follows that, on solving for the constant $\gamma_{\delta+\bar{\delta}+1}$ from the equations (26.), we obtain a quotient of two determinants of order $\frac{1}{2}n(n+1)$ in which the numerator is 0 and the denominator has a value different from 0. In the case in question then the constant $\gamma_{\delta+\bar{\delta}+1}$ in the form (18.) will have the value 0, what is also in accord with the fact that the sum of the residues of a rational function of (z, u) must be equal to 0.

If however we suppose the points (a_λ, b_λ) in the form (18.) to be $\delta+\bar{\delta}+2$ in number, including besides the multiple points and branch points the two additional points $(a_{\delta+\bar{\delta}+1}, b_{\delta+\bar{\delta}+1})$ and $(a_{\delta+\bar{\delta}+2}, b_{\delta+\bar{\delta}+2})$, the residues corresponding to these two points do not require to have the value 0. Employing to designate these two points the more convenient notation (a, b) and $(\bar{a}, \bar{b})$ and indicating the corresponding coefficients γ_λ by γ and $\bar{\gamma}$ respectively, the function (18.) may be written in the form

$$(27.) \qquad \frac{\gamma F(a,u)}{(z-a)(u-b)} + \frac{\bar{\gamma} F(\bar{a},u)}{(z-\bar{a})(u-\bar{b})} + \sum_{1}^{\delta+\bar{\delta}\lambda} \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)}$$

and for the system of equations (17.) we shall have

$$(28.) \qquad \gamma a^i b^\varkappa + \bar{\gamma} \bar{a}^i \bar{b}^\varkappa + \sum_{1}^{\delta+\bar{\delta}\lambda} \gamma_\lambda a_\lambda^i b_\lambda^\varkappa = 0. \qquad (i+\varkappa=0,1,\ldots n-1)$$

If either of the quantities γ or $\bar{\gamma}$ have the value 0 these equations evidently require that both quantities have this value. The equations however evidently do not require that either of the quantities be equal to 0.

Writing

$$F_u'(z,u) = \sum_{i,\varkappa} \alpha_{i,\varkappa} z^i u^\varkappa$$

and multiplying the several equations in (28.) by the corresponding coefficients in $F_u'(z,u)$, we obtain by addition the equation

$$\gamma F_b'(a,b) + \bar{\gamma} F_{\bar{b}}'(\bar{a},\bar{b}) = 0.$$

This equation simply states that the sum of the two residues which present themselves in the expression (27.) has the value 0. On choosing

$$(29.) \qquad \gamma = \frac{1}{F_b'(a,b)} \qquad \bar{\gamma} = -\frac{1}{F_b'(\bar{a},\bar{b})}$$

the equation in question is evidently satisfied, and the residues of the function represented in (27.), corresponding to the points (a,b) and $(\bar{a},\bar{b})$, will have the values $+1$ and -1 respectively.

For an elementary *Abelian* integral of the third kind which becomes logarithmically infinite for the points (a,b) and $(\bar{a},\bar{b})$, and whose characters corresponding to these points are indicated by $\log(z-a)$ and $-\log(z-\bar{a})$ respectively, we shall then have the general form

$$(30.) \qquad \int \left\{ \frac{\gamma F(a,u)}{(z-a)(u-b)} + \frac{\bar{\gamma} F(\bar{a},u)}{(z-\bar{a})(u-\bar{b})} + \sum_{1}^{\delta+\bar{\delta}\lambda} \gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} \right\} dz$$

where the coefficients γ and $\bar{\gamma}$ have the values given in (29.), and the operators γ_λ are subject to the conditions implied in the system of equations (28.). The number of the arbitrary constants involved in the solutions of this system of equations is evidently p, and this therefore is also the number of arbitrary coefficients on which the general integral in (30.) depends—

what is otherwise obvious from the fact that the difference between the general integral in (30.) and a special integral of the same character, identifies itself with the general integral of the first kind.

§ 7.

Since the $\frac{1}{2}n(n+1)$ equations of the system of equations (26.) are linearly independent of one another, so also are the equations of the system (28.) linearly independent, and these equations also as we have seen do not require that either of the quantities γ or $\overline{\gamma}$ have the value 0.

For the operators γ_λ in these equations we may write

$$(31.) \qquad \gamma_\lambda = \frac{1}{F_b'(a,b)}\, g_\lambda - \frac{1}{F_{\bar{b}}'(\bar{a},\bar{b})}\, \bar{g}_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \delta + \bar{\delta})$$

where g_λ and $\bar{g}_\lambda$ are operators of like form with γ_λ. However we may determine the one set of operators g_λ, it is evident that the operators γ_λ will be represented by expressions of the form given in (31.), where the operators $\overline{g}_\lambda$ are determined on substituting these expressions for the operators γ_λ in the system of equations (28.)

We might determine a constant g and the set of operators g_λ so as to satisfy the system of equations

$$(32.) \qquad g\, a^i\, b^\varkappa + \sum_1^{\delta+\bar{\delta}} \lambda \frac{1}{F_b'(a,b)}\, g_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = d_{i,\varkappa}, \qquad (i+\varkappa = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

where the constants $d_{i,\varkappa}$ have any arbitrary values. We see namely that the expressions on the left-hand side of these equations, regarded as functions of the quantity g and of the coefficients of the operators g_λ, are linearly independent of one another, for we saw that the equations (26.) are linearly independent of one another.

If in the system of equations (32.) the constants $d_{i,\varkappa}$ all had the value 0, the constant g would also have to be equal to 0. We shall find it convenient to take all the quantities $d_{i,\varkappa}$ equal to 0, with the exception of some one quantity $d_{r,s}$. For this quantity we shall put $\frac{\varepsilon}{\alpha_{r,s}}$, where ε is an undetermined quantity and $\alpha_{r,s}$ is the coefficient of $z^r u^s$ in the function

$$F_u'(z,u) = \Sigma\, \alpha_{i,\varkappa}\, z^i u^\varkappa.$$

Here the quantity $d_{r,s}$, replaced in this manner, may be any one of the

quantities $d_{i,\varkappa}$, so long as the corresponding coefficient $\alpha_{r,s}$ in the function $F'_u(z,u)$ is different from 0.

On multiplying each of the equations (32.) by the corresponding coefficient $\alpha_{i,\varkappa}$ in the function $F'_u(z,u)$ and adding, we obtain

$$g F'_b(a,b) = \Sigma \alpha_{i,\varkappa} d_{i,\varkappa} = \varepsilon.$$

By assigning a proper value to the undetermined quantity ε we can evidently give g any value we please. There is nothing then to prevent us substituting γ for g in the system of equations (32.), and determining the operators g_λ in accord with the system of equations

$$(33.) \qquad \gamma a^i b^\varkappa + \sum_1^{\delta+\bar{\delta}}{}_\lambda \frac{1}{F'_b(a,b)} g_\lambda a^i_\lambda b^\varkappa_\lambda = d_{i,\varkappa}, \qquad (i+\varkappa = 0,1,2,\ldots n-1)$$

where, as before, the quantities $d_{i,\varkappa}$ all have the value 0, with the exception of a certain one among them $d_{r,s} = \dfrac{\varepsilon}{\alpha_{r,s}}$.

On substituting for the operators γ_λ in the equations (28.) the expressions given in (31.), and on taking account of the equations (33.), we evidently have for the determination of the operators $\bar{g}_\lambda$ the system of equations

$$(34.) \qquad \bar{\gamma}\, \bar{a}^i \bar{b}^\varkappa + \sum_1^{\delta+\bar{\delta}}{}_\lambda \frac{1}{F'_{\bar{b}}(\bar{a},\bar{b})} \bar{g}_\lambda a^i_\lambda b^\varkappa_\lambda = d_{i,\varkappa}, \qquad (i+\varkappa = 0,1,2,\ldots n-1)$$

The constants γ and $\bar{\gamma}$ in the systems of equations (33.) and (34.) evidently have the forms

$$(35.) \qquad \gamma = \frac{\varepsilon}{F'_b(a,b)}, \qquad \bar{\gamma} = -\frac{\varepsilon}{F'_{\bar{b}}(\bar{a},\bar{b})}.$$

We have seen in § 5 that the operators γ_λ in the system of equations (22.) depend on constants, whose number in the aggregate exceeds by p the number $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ of these equations which are linearly independent of one another. In other words the number of these constants is

$$p + \frac{1}{2}n(n+1) - 1.$$

This then is also the aggregate number of constants involved in the operators g_λ in the system of equations (33.). Including the quantity γ then, this system of equations for a given value of ε, involves just $p + \frac{1}{2}n(n+1)$

unknown quantities, and since the $\frac{1}{2}n(n+1)$ equations of the system are linearly independent of one another it follows that their solutions involve p arbitrary constants. The same is of course also true in regard to the equations (34.), regarded as a system of equations for the determination of the constant $\overline{\gamma}$ and the coefficients of the operators $\overline{g}_\lambda$.

On replacing in the equations (33.) and (34.) the quantities γ and $\overline{\gamma}$ by their expressions given in (35.), these equations may be written in the form

$$\varepsilon\, a^i\, b^\varkappa + \sum_1^{\delta+\overline{\delta}} \lambda\, g_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = d_{i,\varkappa} F_b'(a, b), \qquad (i+\varkappa = 0, 1, 2, \ldots n-1) \tag{36.}$$

$$\varepsilon\, \overline{a}^i\, \overline{b}^\varkappa + \sum_1^{\delta+\overline{\delta}} \lambda\, \overline{g}_\lambda\, a_\lambda^i\, b_\lambda^\varkappa = d_{i,\varkappa} F_{\overline{b}}'(\overline{a}, \overline{b}). \tag{37.}$$

On substituting in (31.) for the operators g_λ any arbitrary system of solutions of the equations (36.) and for the operators $\overline{g}_\lambda$ any arbitrary system of solutions of the equations (37.), the resulting system of operators γ_λ will satisfy the system of equations (28.), and we evidently also obtain in this way the most general system of operators γ_λ which satisfy this system of equations. — Here of course at the same time we suppose the quantities γ and $\overline{\gamma}$ in the equations (28.) to be replaced by the expressions given for them in (35.). —

In the equations (36.) and (37.) and in the expressions for γ and $\overline{\gamma}$ given in (35.) we shall now take $\varepsilon = 1$. The system of equations (36.) we may assume to be satisfied by a set of operators g_λ in which the coefficients are functions of (a, b), — regarding this point for the moment as a variable point of our courve. Among the $p+\frac{1}{2}n(n+1)-1$ coefficients in question, p as we have seen are arbitrary. We may regard them as arbitrary constants, or we may if we will replace them by p arbitrary functions of (a, b). Indicating by the notation

$$g_\lambda(a, b) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \delta+\overline{\delta})$$

such a set of operators g_λ satisfying the system of equations (36.), the equations (37.) will evidently also be satisfied by the set of operators

$$g_\lambda(\overline{a}, \overline{b}) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \delta+\overline{\delta})$$

obtained on replacing (a, b) by $(\overline{a}, \overline{b})$ in the coefficients of the operators $g_\lambda(a, b)$.

On taking in (31.)

$$g_\lambda = g_\lambda(a, b), \qquad \overline{g}_\lambda = g_\lambda(\overline{a}, \overline{b}), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \delta+\overline{\delta})$$

we obtain a system of operators

$$(38.) \qquad \gamma_\lambda = \frac{1}{F'_b(a,b)} g_\lambda(a, b) - \frac{1}{F'_{\overline{b}}(\overline{a},\overline{b})} g_\lambda(\overline{a}, \overline{b}) \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots \delta+\overline{\delta})$$

which evidently satisfy the system of equations (28.) on substituting for the coefficients γ and $\overline{\gamma}$ in these equations the values given in (29.). On substituting these values for γ and $\overline{\gamma}$ in (27.) and on assigning to the operators γ_λ the forms given in (38.), we arrive at the expression

$$\frac{1}{F'_b(a,b)} \left\{ \frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)} + \sum_1^{\delta+\overline{\delta}} \lambda \, g_\lambda(a, b) \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} \right\}$$
$$- \frac{1}{F'_{\overline{b}}(\overline{a},\overline{b})} \left\{ \frac{F(\overline{a}, u)}{(z-\overline{a})(u-\overline{b})} + \sum_1^{\delta+\overline{\delta}} \lambda \, g_\lambda(\overline{a}, \overline{b}) \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} \right\}$$

which expression may be written more concisely in the form

$$(39.) \qquad \int_{\overline{a},\overline{b}}^{a,b} \frac{d}{da} \frac{1}{F'_b(a,b)} \left\{ \frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)} + \sum_1^{\delta+\overline{\delta}} \lambda \, g_\lambda(a, b) \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} \right\} da.$$

As an elementary *Abelian* integral of the third kind with the characters indicated by $\log(z-a)$ and $-\log(z-\overline{a})$ respectively for the points (a, b) and $(\overline{a}, \overline{b})$, we therefore have the form

$$(40.) \qquad \iint_{\overline{a},\overline{b}}^{a,b} \frac{d}{da} \frac{1}{F'_b(a,b)} \left\{ \frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)} + \sum_1^{\delta+\overline{\delta}} \lambda \, g_\lambda(a, b) \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} \right\} da \, dz.$$

This form also represents the most general elementary *Abelian* integral of the third kind having the indicated characters for the points (a, b) and $(\overline{a}, \overline{b})$, since it evidently depends upon p arbitrary coefficients, the operators $g_\lambda(a, b)$ as determined by the system of equations (36.) involving this many arbitrary coefficients for a definite value of ε.

§ 8.

For an elementary *Abelian* integral of the second kind corresponding to the point (a, b), we shall have the form

$$(41.)\quad -\int \frac{d}{da}\frac{1}{F_b'(a,b)}\left\{\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}+\sum_1^{\delta+\bar{\delta}}{}_\lambda\, g_\lambda(a,b)\frac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)}\right\}dz$$

obtained on differentiating the expression (40.) with regard to a and changing the sign. The object of the change of sign is to give $+1$ as the residue corresponding to the point (a,b).

That the integral in (41.) is an elementary *Abelian* integral of the second kind may be verified directly as follows. — The function

$$\frac{d}{da}\frac{1}{F_b'(a,b)}\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}=\frac{d}{da}\frac{1}{F_b'(a,b)}\frac{F(a,u)-F(a,b)}{(z-a)(u-b)}$$

is finite for all finite values of z excepting for the value $z=a$, as we see from this form on dividing through by $u-b$ under the sign of differentiation. Also from the form

$$\frac{d}{da}\frac{1}{F_b'(a,b)}\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}=\frac{d}{da}\frac{1}{F_b'(a,b)}\frac{F(a,u)-F(z,u)}{(z-a)(u-b)}$$

we see, on dividing through by $z-a$ under the sign of differentiation, that the same function is finite for all finite values of u excepting for the value $u=b$. It follows that the only finite point for which this function may happen to become infinite is the point (a,b). For this point it actually becomes infinite to the second order, as is evident on writing it in the form

$$\frac{1}{(z-a)^2}\frac{F(a,u)-F(a,b)}{F_b'(a,b)(u-b)}+\frac{1}{z-a}\frac{d}{da}\frac{F(a,u)-F(a,b)}{F_b'(a,b)(u-b)}.$$

Also it is self-evident that in the development of this expression according to powers of $z-a$ the coefficient of $(z-a)^{-2}$ is 1. As a consequence, the integral-expression in (41.) has an infinity of the first order corresponding to the point (a,b), with the residue 1. Furthermore no logarithmic infinity presents itself, as may readily be verified.

That the integrand in (41.) is zero to the order 2 for each of the n branches at ∞ may be seen as follows. — Writing

$$(42.)\quad \gamma(a,b)=\frac{1}{F_b'(a,b)}\frac{d}{da}+\frac{d}{da}\frac{1}{F_b'(a,b)},\qquad \gamma_\lambda(a,b)=\frac{d}{da}\frac{g_\lambda(a,b)}{F_b'(a,b)}$$

our integrand will take the form

$$(43.)\qquad \gamma(a,b)\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}+\sum_1^{\delta+\bar{\delta}}{}_\lambda\,\gamma_\lambda(a,b)\frac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)}$$

and the necessary and sufficient conditions that the function represented by this form may be zero to the order 2 for each of the n branches at ∞, are given by the system of equations

$$\gamma(a,b)\,a^i b^z + \sum_1^{\delta+\bar{\delta}} \lambda\, \gamma_\lambda(a,b)\, a_\lambda^i b_\lambda^z = 0. \qquad (i+z=0,1,\ldots n-1) \tag{44.}$$

Namely the necessary and sufficient conditions that the function (18.) may be zero to the order 2 for each of the n branches at ∞ we have seen to be given by the system of equations (17.), and we have further pointed out in § 5, that the validity of the reasoning by which we arrived at this conclusion depends only on the fact that the operators γ_λ satisfy the identities

$$\gamma_\lambda \frac{F(a_\lambda, b_\lambda)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = 0.$$

In the present case we evidently have

$$\gamma(a,b)\frac{F(a,b)}{(z-a)(u-b)} = 0, \qquad \gamma_\lambda(a,b)\frac{F(a_\lambda,b_\lambda)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} = 0,$$

so that the equations (44.) furnish the necessary and sufficient conditions in order that the function (43.) may be zero to the order 2 for each of the n branches at ∞.

That the equations (44.) are actually satisfied by the operators γ and γ_λ here in question is evident, for they follow directly by differentiation with regard to a, from the system of equations

$$\frac{a^i b^z}{F_b'(a,b)} + \sum_1^{\delta+\bar{\delta}} \lambda \frac{g_\lambda(a,b)}{F_b'(a,b)} a_\lambda^i b_\lambda^z = d_{i,z} \qquad (i+z=0,1,2,\ldots n-1)$$

which are supposed to be satisfied by the operators $g_\lambda(a,b)$.

It is easily shewn that the most general elementary *Abelian* integral of the second kind corresponding to the point (a, b) and having the residue 1 is given by the expression (41.). For p of the coefficients in the operators $g_\lambda(a,b)$ are arbitrary functions of (a,b) and therefore the integral expression (41.) will also involve p arbitrary functions of (a,b) in its coefficients, and regarded as a function of z will consequently depend on p arbitrary constants—apart of course from the constant of integration.

Instead of representing the elementary *Abelian* integral in the form (41.), we may evidently also make use of the form

$$(45.)\qquad -\int\left\{\frac{d}{da}\frac{1}{F_b(a,b)}\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}+\sum_{1}^{\delta+\bar{\delta}}{}_{\lambda}\,\gamma_\lambda(a,b)\frac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)}\right\}dz,$$

where, on writing for brevity

$$\gamma(a,b)=\frac{1}{F_b'(a,b)}\frac{d}{da}+\frac{d}{da}\frac{1}{F_b'(a,b)}$$

the operators $\gamma_\lambda(a,b)$ are chosen directly subject to the system of equations (44.). For these are the equations which express the necessary and sufficient conditions, in order that the integrand of the integral in (45.) may be zero to the second order for each of the n branches at ∞.

§ 9.

In the preceding we have obtained forms for the general *Abelian* integral of the first kind, and for the elementary *Abelian* integrals of the second and third kinds corresponding to ordinary points of the curve.

By successive differentiations with regard to a of the integral given in (41.), we obtain integrals of the second kind which possess infinities of orders higher than the first, corresponding to the point (a,b), and which are elsewhere finite. Also in analogy with the form given in (45.), we might construct such integrals in the form

$$(46.)\quad\left\{-\int\left\{\frac{1}{r-1!}\left(\frac{d}{da}\right)^r\frac{1}{F_b'(a,b)}\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}+\sum_{1}^{\delta+\bar{\delta}}{}_{\lambda}\,\gamma_\lambda^{(r-1)}(a,b)\frac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)}\right\}dz,\right.$$

subject to the equations of condition

$$(47.)\qquad \frac{1}{r-1!}\left(\frac{d}{da}\right)^r\frac{a^i b^\varkappa}{F_b'(a,b)}+\sum_{1}^{\delta+\bar{\delta}}{}_{\lambda}\,\gamma_\lambda^{(r-1)}(a,b)\,a_\lambda^i\,b_\lambda^\varkappa=0\,. \qquad {\scriptstyle (i+\varkappa=0,1,2,\ldots n-1)}$$

These equations namely express the necessary and sufficient conditions in order that the integrand in (46.) may be zero to the second order for each of the n branches at ∞.

That the integral is everywhere finite excepting for the point (a,b) is apparent, and that it possesses an infinity of the rth order corresponding to this point we may see on considering the expression

$$\frac{1}{r-1!}\left(\frac{d}{da}\right)^r\frac{1}{F_b'(a,b)}\frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}=\frac{1}{r-1!}\left(\frac{d}{da}\right)^r\frac{1}{z-a}\cdot\frac{F(a,u)-F(a,b)}{F_b'(a,b)(u-b)}\,.$$

Namely on regarding the expression under the sign of differentiation as a product one of whose factors is $\frac{1}{z-a}$, we see that the differentiation can give rise at most to an infinity of order $r+1$, and that such infinity can only present itself in connection with the element

$$\frac{r}{(z-a)^{r+1}} \cdot \frac{F(a,u)-F(a,b)}{F_b'(a,b)\,(u-b)}$$

in the development of which the coefficient of $(z-a)^{-(r+1)}$ is evidently r. In the development of the integral expression in (46.) then a term in $(z-a)^{-r}$ will evidently present itself with the coefficient 1.

The indications given in § 3 are sufficient to enable us to construct functions, whose integrals are to present certain logarithmic or algebraic infinities corresponding to the branches at ∞.

We may also readily construct integrals presenting logarithmic or algebraic infinities for branches passing through multiple points of the curve. In § 6 of the paper on the *Riemann-Roch* Theorem already referred to, we have seen in the case of a multiple point (a, b) of multiplicity σ that the function

$$\Big(\frac{d}{\partial a} + m_\varkappa \frac{\partial}{\partial b}\Big)^{\sigma-1} \frac{F(a,u)}{(z-a)(u-b)}$$

presents an infinity of the first order corresponding to the $\varkappa^{\text{th}}$ branch through the point, where $m_\varkappa$ indicates the inclination of the tangent to the branch in question, and excepting for this infinity is everywhere finite for finite values of z. If then the expression (18.) is to be the integrand of an integral presenting a logarithmic infinity corresponding to the $\varkappa^{\text{th}}$ branch passing through the multiple point (a_λ, b_λ), we include in the operator γ_λ an additional term of the form

$$c\Big(\frac{\partial}{\partial a_\lambda} + m_\varkappa \frac{\partial}{\partial b_\lambda}\Big)^{\sigma_\lambda - 1},$$

where c is a constant — The operators γ_λ are of course still supposed to satisfy the equations of condition (17.).—

It is evident that such a logarithmic infinity might also be accounted for on including in the operator an additional term of the form

$$c\Big(\frac{d}{da_\lambda}\Big)^{\sigma_\lambda - 1},$$

where the differentiation with regard to a_λ has reference to the point (a_λ, b_λ), regarded as lying on the branch of the curve here in question.

If for the same branch of the curve our integral is to present an algebraic infinity of the first order, this infinity may be accounted for by the presence of an additional element of the form

$$c_1\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda} + c_0\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda - 1}$$

in the operator γ_λ appearing in the integrand represented as in (18.). More generally, the possession of an infinity of the rth order on the part of the integral will be indicated by the presence of an additional aggregate of terms of the type

$$(48.) \qquad c_r\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda + r - 1} + c_{r-1}\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda + r - 2} + \cdots + c_0\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda - 1}$$

in the operator γ_λ, for the function

$$(49.) \qquad \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda + \varrho - 1} \frac{F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)}$$

as may readily be shewn, possesses an infinity of the order $\varrho + 1$ for the branch in question, while for the other branches passing through the multiple point (a_λ, b_λ) and for all the other finite points of the curve it remains finite.

§ 10.

It might be well to prove the statement in regard to the function (49.) with which we have closed the section preceding. That the function is finite for all finite points of the curve with the exception of the point (a_λ, b_λ) is evident. We shall prove that it becomes infinite for only one of the branches passing through this point, namely for that branch on which, in differentiating with regard to a_λ, the point is supposed to lie; and furthermore we shall prove that $\varrho + 1$ is the order of the infinity in question.

We shall begin by considering the function

$$(50.) \qquad \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{\sigma_\lambda + \varrho - 1} \frac{F(\xi, u)}{(z - \xi)(u - \eta)}$$

in which (ξ, η) is an ordinary point of our curve distinct from, but as near as we like to, the multiple point (a_λ, b_λ). This function we know to be finite for all finite points of the curve with the exception of the point (ξ, η).

We shall suppose the point (ξ, η) to lie on that branch of the curve through the point (a_λ, b_λ) on which, in effecting the indicated differentiations in (49.), this point was supposed to lie.

On dividing $F(\xi, u)$ by $u-\eta$ under the sign of differentiation in (50.), we may write this function in the form

$$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1} \frac{F'_\eta + \frac{1}{2!}F''_\eta(u-\eta) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}_\eta(u-\eta)^{n-1}}{z-\xi}$$

and on effecting the differentiations with regard to ξ, this expression takes the form

$$(51.) \qquad \frac{G(z-\xi, u-\eta, \xi, \eta, \eta', \eta'', \ldots \eta^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)})}{(z-\xi)^{\sigma_\lambda+\varrho}},$$

where $\eta', \eta'', \ldots \eta^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)}$ indicate the successive derivatives of η with regard to ξ, and where the numerator is a polynomial in these quantities and in the quantities $z-\xi$, $u-\eta$, ξ, η.

For the equations to the n branches of our curve corresponding to the value $z=\xi$ we may write

$$\begin{aligned}
u &= \eta + \eta'(z-\xi) + \frac{1}{2!}\eta''(z-\xi)^2 + \cdots, \\
u &= \eta_2 + \eta'_2(z-\xi) + \frac{1}{2!}\eta''_2(z-\xi)^2 + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u &= \eta_n + \eta'_n(z-\xi) + \frac{1}{2!}\eta''_n(z-\xi)^2 + \cdots.
\end{aligned}$$

The first of these branches passes through the point (ξ, η) and it is for this branch alone of the n branches, as we know, that our function can become infinite.

On substituting for u its expression in terms of $z-\xi$ as given by the equation to the $\varkappa^{\text{th}}$ branch, the function (51.) will evidently assume the form

$$(52.) \quad \left\{ \begin{aligned} &(z-\xi)^{-(\sigma_\lambda+\varrho)} \sum_{0}^{\sigma_\lambda+\varrho-1} g_r(\xi, \eta, \eta', \ldots \eta^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)}, \eta_\varkappa, \eta'_\varkappa, \ldots \eta_\varkappa^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)})(z-\xi)^r \\ &\qquad + P(z-\xi), \end{aligned} \right.$$

where the coefficients $g_r(\xi, \eta, \eta', \ldots \eta^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)}, \eta_\varkappa, \eta'_\varkappa, \ldots \eta_\varkappa^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)})$ are polyno-

mials in the quantities in parentheses and where $P(z-\xi)$ is a series involving only positive powers of $z-\xi$. Since our function is finite for all n branches other than the first branch, it follows that we must have

$$g_r(\xi, \eta, \eta', \dots \eta^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)}, \eta_\varkappa, \eta'_\varkappa, \dots \eta_\varkappa^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)}) = 0. \qquad (r=0,1,\dots\sigma_\lambda+\varrho-1;\ \varkappa=2,3,\dots n)$$

Now letting ξ approach the value a_λ, each one of the points

$$(\xi, \eta), (\xi, \eta_2), \dots (\xi, \eta_n)$$

may be assumed to move up along a distinct one ot the n branches of our curve corresponding to the value $z=a_\lambda$, towards one of the points corresponding to this value of the variable z. The point (ξ, η) in particular we assume to approach the multiple point (a_λ, b_λ) along that branch through the latter point on which, in effecting the indicated operations in (49.), the multiple point was supposed to lie. Together with the point (ξ, η), of course, certain of the points $(\xi, \eta_2), \dots (\xi, \eta_n)$ will approach the multiple point (a_λ, b_λ), each one however along a distinct branch. As ξ approaches a_λ the quantities $\eta, \eta', \dots \eta_n^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)}, \eta_\varkappa, \eta'_\varkappa, \dots \eta_\varkappa^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)}$ all change continuously and therefore so also do the polynomials $g_r(\xi, \eta, \eta', \dots \eta^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)}, \eta_\varkappa, \eta'_\varkappa, \dots \eta_\varkappa^{(\sigma_\lambda+\varrho-1)})$. However near ξ approaches to a_λ these polynomials have the value 0, and, because of their continuity, they will therefore also have this value when ξ goes over into a_λ. When ξ goes over into a_λ however, the function (51.) is replaced by the function (49.), and the polynomials in question go over into the coefficients of the negative powers of $z-a_\lambda$ which present themselves in the developments of this function for $n-1$ of the n branches of our curve corresponding to the value $z=a_\lambda$. The excluded branch is that one of the n branches corresponding to the value $z=a_\lambda$ on which we have supposed the point (ξ, η) to lie, that is the branch on which, in effecting the indicated differentiations in (49.), the point (a_λ, b_λ) was supposed to lie. With the exception then of the coefficients of the negative powers of $z-a_\lambda$ in the development of the function (49.) corresponding to this branch, the coefficients of such powers of $z-a_\lambda$ in the developments of the function for the several branches corresponding to the value $z=a_\lambda$ all have the value 0. It follows that the function (49.) cannot become infinite for any of the branches corresponding to the value $z=a_\lambda$, unless it be for that branch on which, in effecting the indicated differentiations, the point (a_λ, b_λ) is supposed to lie. That the function actually does become infinite for this

branch we shall now shew, and we shall prove at the same time that $\varrho + 1$ is the order of the infinity in question.

We may write the function in the form

$$(53.)\quad \begin{cases} \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1} \frac{F(a_\lambda, u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)} \\ \qquad = \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1} \frac{F'_{b_\lambda} + \frac{1}{2!}F''_{b_\lambda}(u-b_\lambda) + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}_{b_\lambda}(u-b_\lambda)^{n-1}}{z-a_\lambda}. \end{cases}$$

Consider for a moment a function of the type

$$(54.)\quad \begin{cases} \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^s \frac{u-b_\lambda}{z-a_\lambda} = \sum_0^s{}_i \binom{s}{i} \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^i \frac{1}{z-a_\lambda} \cdot \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{s-i} (u-b_\lambda) \\ \qquad = \frac{s!\,(u-b_\lambda)}{(z-a_\lambda)^{s+1}} - \frac{s!\,m}{(z-a_\lambda)^s} + \frac{1}{(z-a_\lambda)^{s-1}}((z-a_\lambda)), \end{cases}$$

where the expression $((z-a_\lambda))$ involves no negative powers of $z-a_\lambda$, and where m is the inclination of the tangent to the branch on which in differentiating the point (a_λ, b_λ) is supposed to lie. Now on substituting for $u-b_\lambda$ from the equation to the branch

$$u - b_\lambda = m(z-a_\lambda) + \cdots,$$

we obtain

$$\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^s \frac{u-b_\lambda}{z-a_\lambda} = \frac{s!\,m}{(z-a_\lambda)^s} - \frac{s!\,m}{(z-a_\lambda)^s} + \frac{1}{(z-a_\lambda)^{s-1}}((z-a_\lambda))_1,$$

where $((z-a_\lambda))_1$ involves no negative powers of $z-a_\lambda$. It follows that the function (54.) cannot become infinite to an order higher than $s-1$ for the branch on which in differentiating the point (a_λ, b_λ) is supposed to lie.

Now consider the more general case of the function

$$(55.)\quad \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^s \frac{(u-b_\lambda)^\varkappa}{z-a_\lambda} = \sum_0^s{}_i \binom{s}{i} \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^i \frac{u-b_\lambda}{z-a_\lambda} \cdot \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{s-i} (u-b_\lambda)^{\varkappa-1}. \qquad (\varkappa \leqq 1)$$

In any term of the summation here appearing the factor

$$\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^i \frac{u-b_\lambda}{z-a_\lambda}$$

cannot become infinite to an order greater than $i-1$ for the branch in question, and the factor

$$\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{s-i} (u-b_\lambda)^{\varkappa-1}$$

certainly cannot become infinite for this branch, and, if $\varkappa - 1 > s - i$, it will be zero to the order $\varkappa - 1 - (s - i)$ at least. In any case then the term of the summation cannot become infinite to an order greater than

$$i - 1 - \varkappa + 1 + s - i = s - \varkappa$$

for the branch which we are considering. Since for the branch in question none of the terms in the summation on the right of the identity (55.) can become infinite to an order greater than $s - \varkappa$, so also can the function on the left not become infinite to an order greater than $s - \varkappa$ for this branch. — Where, in the immediately preceding, we say of an expression that it cannot become infinite to an order greater than that indicated by a certain number and the number turns out to be negative, it suffices to interpret this simply as meaning that the expression in question does not become infinite for the branch under consideration.

In the light of the result just arrived at we shall now consider any element

$$\frac{1}{\varkappa+1!}\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1}\frac{F_{b_\lambda}^{(\varkappa+1)}(u-b_\lambda)^\varkappa}{z-a_\lambda} \qquad (\varkappa \gtreqless 1)$$

of the expression on the right of (53.) other than the first element, in which element $\varkappa = 0$.

On regarding the expression under the sign of differentiation as a product of two factors one of which is $F_{b_\lambda}^{(\varkappa+1)}$, we may write

$$\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1}\frac{F_{b_\lambda}^{(\varkappa+1)}(u-b_\lambda)^\varkappa}{z-a_\lambda}$$
$$= \sum_0^{\sigma_\lambda+\varrho-1}\binom{\sigma_\lambda+\varrho-1}{s}\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1-s}\cdot F_{b_\lambda}^{(\varkappa+1)}\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^s\frac{(u-b_\lambda)^\varkappa}{z-a_\lambda}.$$

Now terms of the summation on the right of this identity in which

$$\sigma_\lambda + \varrho - s + \varkappa < \sigma_\lambda$$

evidently vanish, for partial derivatives of $F(a_\lambda, b_\lambda)$ of order $< \sigma_\lambda$ are equal to 0. For any term other than one of these $s \gtreqless \varrho + \varkappa$, and by what we have seen in the preceding such term cannot become infinite to an order greater than $s - \varkappa$, and therefore it can certainly not become infinite to an order greater than ϱ. The expression on the left of the identity here in

question, and therewith the corresponding element on the right of (53.), can therefore not become infinite to an order greater than ϱ.

The preceding argument applies to all the elements on the right of (53.) in which $\varkappa \geqq 1$. The only remaining element, that namely in which $\varkappa = 0$, is

$$\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1} \frac{F'_{b_\lambda}}{z-a_\lambda}.$$

If then the expression in (53.) is to possess an infinity of order higher than ϱ for the branch in question, it can only be by virtue of this element.

On writing

$$\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1} \frac{F'_{b_\lambda}}{z-a_\lambda} = \sum_0^{\sigma_\lambda+\varrho-1} \binom{\sigma_\lambda+\varrho-1}{s} \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1-s} F'_{b_\lambda} \cdot \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^s \frac{1}{z-a_\lambda}$$

we see that all the terms vanish in which $s > \varrho$, since partial derivatives of $F(a_\lambda, b_\lambda)$ of order $< \sigma_\lambda$ are equal to 0. We may therefore write

$$\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1} \frac{F'_{b_\lambda}}{z-a_\lambda} = \sum_0^{\varrho} \binom{\sigma_\lambda+\varrho-1}{s} \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda+\varrho-1-s} F'_{b_\lambda} \cdot \frac{s!}{(z-a_\lambda)^{s+1}}.$$

Now no term in the summation appearing on the right of this identity can present an infinity of order higher than $\varrho+1$, and the only term which possesses an infinity of this order is

$$\frac{\sigma_\lambda+\varrho-1!}{\sigma_\lambda-1!} \left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda-1} F'_{b_\lambda} \cdot \frac{1}{(z-a_\lambda)^{\varrho+1}} \tag{56.}$$

which corresponds to the value $s = \varrho$.

That the coefficient in the expression (56.) is different from 0 may be easily verified as follows. — Indicating by m the inclination of the tangent to the branch with regard to which we are differentiating, we may write

$$\left(\frac{d}{da_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda-1} F'_{b_\lambda} = \left(\frac{\partial}{\partial a_\lambda} + m\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda-1} F'_{b_\lambda}, \tag{57.}$$

since partial derivatives of $F(a_\lambda, b_\lambda)$ of order less than σ_λ are equal to 0. Now by hypothesis the inclinations of the tangents to the σ_λ branches through the multiple point (a_λ, b_λ) are all different from one another, and these inclinations as we know are determined from the equation in m

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_\lambda} + m\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda} F(a_\lambda, b_\lambda) = 0.$$

The first derivative with regard to m of the polynomial on the left-hand side of this equation will then be different from 0, when for m is substituted the inclination of the tangent to any one of the σ_λ branches which pass through the point (a_λ, b_λ). This first derivative however evidently has the form

$$\sigma_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial a_\lambda} + m \frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^{\sigma_\lambda - 1} F'_{b_\lambda}$$

and this expression being different from 0, so also is the expression on either side of the equation (57.) and therewith the coefficient of $(z-a_\lambda)^{-(\varrho+1)}$ in (56.) different from 0.

The function (49.) then possesses an infinity of order $\varrho+1$ corresponding to the branch on which, in effecting the differentiations indicated, the point (a_λ, b_λ) is supposed to lie, such infinity arising from a term of form (56.) which presents itself in the development of the function according to powers of $z-a_\lambda$; the function being at the same time finite for the other branches through this point and for all other finite points on the curve.

§ 11.

We have seen how to construct the integrand of an *Abelian* integral which is to possess certain logarithmic or algebraic infinities corresponding to ordinary points or to multiple points of the curve. It remains to modify the form of the integrand so as to take account of infinities corresponding to the branch points.

Still assuming the expression (18.) subject to the equations of condition (17.) to represent our integrand, we see, in the case of a branch point (a_λ, b_λ), that an extra term of the form

$$c\left(\frac{\partial}{\partial b_\lambda}\right)^{\nu_\lambda - 1}$$

included in the operator γ_λ, will give rise to a logarithmic infinity in the integral. Also such a logarithmic infinity might be accounted for by the presence in the operator of a term of the form

$$c\left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu_\lambda - 1}.$$

If our integral is to present an algebraic infinity of the first order corresponding to the branch point in question, it will suffice to introduce in the operator γ_λ an additional element of the form

$$c_{\nu_\lambda}\left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu_\lambda} + c_{\nu_\lambda - 1}\left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu - 1}.$$

More generally the possession of an infinity of the rth order on the part of the integral will be indicated by the presence of an additional aggregate of terms of the type

$$(58.)\quad c_{\nu_\lambda + r - 1}\left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu_\lambda + r - 1} + c_{\nu_\lambda + r - 2}\left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu_\lambda + r - 2} + \cdots + c_{\nu_\lambda - 1}\left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu_\lambda - 1}$$

in the operator γ_λ, for the function

$$(59.)\qquad \left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu_\lambda + \varrho - 1} \frac{F(a_\lambda, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)},$$

as may readily be shewn, possesses an infinity of the $(\nu_\lambda + \varrho)^{\text{th}}$ order for the point (a_λ, b_λ) and is finite for all other finite points of the curve.

That the function (59.) cannot become infinite for finite points of the curve other than for the point (a_λ, b_λ) is readily seen. Namely on writing the function in the form

$$\left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu_\lambda + \varrho - 1} \frac{F(a_\lambda, u) - F(a_\lambda, b_\lambda)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)}$$

and on dividing through by $u - b_\lambda$ under the operator, we see, as far as finite values of the variable are concerned, that the function can only become infinite for $z = a_\lambda$. On writing the function in the form

$$\left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu_\lambda + \varrho - 1} \frac{F(a_\lambda, u) - (F(z, u)}{(z - a_\lambda)(u - b_\lambda)}$$

and on dividing through by $z - a_\lambda$ under the sign of differentiation, we see that the function cannot become infinite for $z = a_\lambda$ unless at the same time we have $u = b_\lambda$. The function (59.) therefore cannot become infinite for any finite point of the curve unless it be for the point (a_λ, b_λ). That it actually does become infinite for this point, and to what order, we may see on effecting the division by $z - a_\lambda$ just indicated and considering the function in the form

$$\left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu_\lambda+\varrho-1}\frac{F(a_\lambda,u)}{(z-a_\lambda)(u-b_\lambda)}=\left(\frac{d}{db_\lambda}\right)^{\nu_\lambda+\varrho-1}\frac{G(a_\lambda,z,u)}{u-b_\lambda},$$

where $G(a_\lambda, z, u)$ is a polynomial in a_λ, z, u.

That this function cannot become infinite to an order higher than the $(\nu_\lambda+\varrho)^{\text{th}}$ for the point in question is evident. Also on effecting the indicated differentiations, the only element in the resulting expression which might possibly give rise to an infinity of this order is

$$\text{(60.)}\qquad \frac{(\nu_\lambda+\varrho-1)!\,G(a_\lambda,z,u)}{(u-b_\lambda)^{\nu_\lambda+\varrho}}.$$

That this element actually does become infinite to the $(\nu_\lambda+\varrho)^{\text{th}}$ order is apparent, for on substituting (a_λ, b_λ) for (z, u) in the polynomial $G(a_\lambda, z, u)$ we obtain

$$G(a_\lambda,a_\lambda,b_\lambda)=\left[\frac{F(a_\lambda,u)-F(z,u)}{z-a_\lambda}\right]_{a_\lambda,b_\lambda}=-F'_{a_\lambda}(a_\lambda,b_\lambda),$$

an expression which has a value different from 0, since we already have $F'_{b_\lambda}(a_\lambda, b_\lambda)=0$, and because, by hypothesis, the branch point (a_λ, b_λ) is not at the same time a multiple point.

The development of the function (59.) corresponding to any one of the cycle of ν_λ branches passing through the point (a_λ, b_λ) will then present a term in $(z-a_\lambda)^{-\frac{\nu_\lambda+\varrho}{\nu_\lambda}}$, whose coefficient is immediately furnished by the element (60.). Such coefficient will evidently have the form

$$-(\nu_\lambda+\varrho-1)!F'_{a_\lambda}\alpha^{\nu_\lambda+\varrho},$$

where

$$\alpha^{\nu_\lambda}=\frac{1}{\nu_\lambda!}\left[\frac{d^{\nu_\lambda}z}{du^{\nu_\lambda}}\right]_{a_\lambda,b_\lambda}.$$

We see then that the inclusion of an aggregate of terms of the type (58.) in the operator γ_λ corresponding to a branch point (a_λ, b_λ), gives rise to an algebraic infinity of the $(\nu_\lambda+r)^{\text{th}}$ order in the integral whose integrand is supposed to be represented by the expression (18.) – it being understood of course that the coefficient $c_{\nu_\lambda+r-1}$ in (58.) has a value other than 0. Whether our integral becomes logarithmically as well as algebraically infinite

for the point in question, depends naturally on the values of the coefficients c in (58.).

It may be remarked that in the definition of the operator γ_λ corresponding to a branch point (a_λ, b_λ), as given in formula (20.), we might replace the partial derivatives with regard to b_λ by total derivatives, in which case, on adjoining an element of the type given in (58.), the extended operator could be written in the form

$$\gamma_\lambda = \sum_{0}^{\nu_\lambda+r-1} {}_s \; c_{s,\lambda} \left(\frac{d}{d b_\lambda}\right)^s. \tag{61.}$$

Druckfehlerverzeichnis

zu der Arbeit von Herrn *Tichomandritzky* in Heft 4, Band 126.

S. 287 Z. 4 v. o.	statt	w_{hg} und w'_{hg}	lies	ω_{hg} und ω'_{hg}
S. 289 Z. 4 v. u.	„	$\overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}$	„	$\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}_h^{(0)}}}$
S. 295 Z. 7 v. u.	„	$\boldsymbol{\Phi}\left(u_h^{(0)}\middle\vert \overset{p}{\underset{1}{u_h^{(0)}}}, C_h\right)$	„	$\boldsymbol{\Phi}\left(u_{h\,\vert}\overset{p}{\underset{1}{u_k^{(0)}}}, C_h\right)$
S. 298 Z. 3 v. o.	„	(5)	„	(5′)
S. 303 Z. 5 v. o.	„	(5)	„	(15)
S. 308 Z. 9 v. u.	„	$\overset{p}{\underset{1}{u_h}},$	„	$\overset{p}{\underset{1}{\overline{u}_h}},$
S. 311 Z. 8 v. u.	„	$Z\left(u_h+\overset{p}{\underset{1}{\overline{\omega}_h}}\right)_\xi,$	„	$Z\left(u_h+\frac{1}{2}\overline{\omega}_h\right)_\xi,$
S. 315 Z. 12 v. u.	„	$d\log\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)$	„	$d\log\Theta\left(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}\right)$
S. 323 Z. 5 v. o.	„	$2\pi i$	„	πi
S. 325 Z. 4 u. 10 v. o.	„	$-\frac{1}{2}$	„	$+\frac{1}{2}$
S. 325 Z. 8 v. u.	„	$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}\right)$	„	$\dfrac{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{v_h}}\right)}{\vartheta(0_h)}$

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 127.

Heft III-IV.

Ausgegeben den 12. August.

Berlin,
W. 35 Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1904.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 12.—.

Hierzu eine Beilage der Zeitschrift „L'Enseignement Mathématique" Paris-Genf und ein Prospekt betr.: III. Internat. Mathematiker-Kongreß in Heidelberg 1904.

Band 127. Heft III-IV.

Inhaltsverzeichnis.

ndau, E., Über eine Darstellung der Anzahl der Idealklassen eines algebraischen Körpers durch eine unendliche Reihe . . . . . Seite 167

ldberg, A., Über Differenzengleichungen, die Fundamentallösungen besitzen — 175

hl, P., Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage . . . . . — 179

elds, J. C., Forms for the *Abelian* Integrals of the three kinds in the case of a curve for which the tangents at the multiple points are distinct from one another . . . . . — 277

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik, essor Dr. Kurt Hensel. Marburg a. d. L., Universitätsstraße 54.